

Die äußere Kruste kalter Neutronensterne

Matthias Hempel
Institut für theoretische Physik

Diplomarbeit
vorgelegt beim Fachbereich Physik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main

November 2006

Danksagung

Hiermit möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich während meiner Diplomarbeit in vielfältiger Weise unterstützt und damit einen Teil zu dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein Dank gilt an allererster Stelle HD Dr. Jürgen Schaffner-Bielich für seine außergewöhnliche Betreuung und stete Unterstützung. Für Fragen und Probleme fand er immer Zeit und wusste hilfreichen Rat. Seine Erklärungen, Ideen und Anregungen haben diese Arbeit überhaupt erst ermöglicht. In seinen vielfältigen und interessanten Vorlesungen hat er meine Begeisterung für die theoretische Astrophysik geweckt und mir die astro-physikalischen Grundlagen dieser Arbeit vermittelt. Bedanken möchte ich mich auch für die Möglichkeit an mehreren nationalen und internationalen Konferenzen aktiv teilzunehmen und dort in einer ansprechenden Umgebung aktuelle Antworten der Forschung aus erster Hand zu erfahren.

Prof. Dr. Carsten Greiner möchte ich aufrichtig für seine Unterstützung und Förderung während meines Studiums danken. Seine lehrreichen, begeisternden Vorlesungen und das spannende Proseminar zusammen mit Jürgen Schaffner-Bielich führten zu der Entscheidung, meine Diplomarbeit in der theoretischen Physik durchzuführen.

Des Weiteren danke ich Dr. Thomas Bürvenich, Dr. Thomas Cornelius, Prof. Dr. Stefan Schramm und Dr. Lisheng Geng für die Bereitstellung der Massentabellen der relativistischen Kernmodelle, die in dieser Diplomarbeit Verwendung fanden.

Stefan Rüster danke ich für die Hilfe, die er mir insbesondere zu Beginn meiner Diplomarbeit gab. Seine Rechnungen und Erläuterungen zur äußeren Kruste erleichterten mir den Einstieg in mein Arbeitsgebiet. Die folgende Zusammenarbeit mit ihm war sehr produktiv und hat stets Spaß gemacht. Auch allen anderen Mitgliedern der Astro-Gruppe möchte ich für das angenehme Miteinander danken. Insbesondere sei meine Zimmernachbarin Irina Sagert erwähnt für das Korrekturlesen dieser Arbeit und die erfolgreiche Zusammenarbeit seit dem Proseminar. Herzlichen Dank für die stets schöne und harmonische Zeit im Büro und die vielfältigen Gespräche.

Ganz besonderer Dank gebührt meiner Freundin Claudia Strabel. Der Austausch mit ihr über meine Diplomarbeit, ihre Vorschläge und Korrekturen waren eine besondere Hilfe. Noch viel wichtiger war aber ihr Ansporn und die Motivation, die sie mir auch in den schwierigen Momenten meines Studiums geben konnte. Ich danke meinem Vater Klaus Hempel, ohne ihn hätte ich auch im Studium nie soviel erreicht. Ganz besonders danke ich meiner Mutter Ingeborg Hempel für all die Arbeit und Kraft, die sie investiert hat, um mir ein freies und sorgenloses Studium zu ermöglichen.

Inhaltsverzeichnis

1	Neutronensterne	5
1.1	Entstehung	12
1.1.1	Ein Stern im Endzustand	12
1.1.2	Supernova-Explosion	13
1.1.3	Geburt des Neutronensterns	14
1.1.4	Pulsar-Kicks	17
1.1.5	Formierung der Kruste	18
1.2	Aufbau und Struktur	20
1.2.1	Seltsame Neutronensterne	28
1.2.2	Akkretierende Neutronensterne	29
1.3	Motivation dieser Arbeit	30
2	Das BPS-Modell	34
2.1	Das ursprüngliche BPS-Modell	34
2.1.1	Die Energiedichte der freien Elektronen	34
2.1.2	Die Kernmasse	35
2.1.3	Die Gitterenergie	36
2.1.4	Druck des Systems	37
2.1.5	Bestimmung des Grundzustandes	38
2.2	Erweiterung des BPS-Modells	42

2.2.1	Mögliche gemischte Phasen	42
2.2.2	Atomare Bindungsenergien	42
2.2.3	Die Screening-Energie	43
2.2.4	Die Austauschenergie	44
2.2.5	Weitere mögliche Korrekturen	46
2.3	Stabilität des Gitters	47
2.3.1	Nullpunktsbewegung der Ionen	47
2.3.2	Schmelztemperatur des Gitters	48
3	Theoretische Kernmodelle	50
3.1	Tröpfchen-Modelle	50
3.1.1	Verwendete Parametrisierungen	53
3.2	Nichtrelativistische Modelle	54
3.2.1	Selbstkonsistente Rechnungen	54
3.2.2	Die Hartree-Fock-Näherung	54
3.2.3	Die Skyrme-Kraft	56
3.2.4	Die Paarkraft	57
3.2.5	Deformationen	60
3.2.6	Verwendete Parametrisierungen	60
3.3	Relativistische Modelle	62
3.3.1	Die Lagrangedichte	63
3.3.2	Näherungen	64
3.3.3	Die Bewegungsgleichungen	65
3.3.4	Verwendete Parametrisierungen	66
4	Ergebnisse	69
4.0.5	Definition und Bedeutung der Driplines	70
4.1	Die Zustandsgleichung	71

4.1.1	Der adiabatische Index	73
4.2	Kernsequenzen und Driplines	75
4.2.1	Tröpfchen-Modelle	75
4.2.2	Nichtrelativistische Modelle	76
4.2.3	Relativistische Modelle	79
4.2.4	Neutronen-Driplines	82
4.2.5	Sequenzen	84
4.2.6	Ergebnisse der Top-Modelle	86
4.2.7	Vergleich mit vorangehenden Arbeiten	88
5	Analyse	92
5.1	Auswirkungen der Erweiterungen	92
5.1.1	Sequenzen	92
5.1.2	Zustandsgleichung	94
5.2	Auswirkungen des Gitters	96
5.2.1	Sequenzen	96
5.2.2	Zustandsgleichung	99
5.3	Zusammensetzung der Zustandsgleichung	100
5.3.1	Erweiterungen	104
6	Masse, Radius und Zusammensetzung	106
6.1	Theorie	106
6.2	Abhängigkeit von der Zustandsgleichung	108
6.3	Abhängigkeit vom inneren Bereich	110
6.4	Zusammensetzung	112
7	Zusammenfassung und Ausblick	115
A	Kernmodelle und Sequenzen	I

B	Sequenzen in tabellarischer Form	III
----------	---	------------

	Literaturverzeichnis	IX
--	-----------------------------	-----------

Kapitel 1

Neutronensterne

Die Idee

Im Januar des Jahres 1932 studierte Lev Davidovich Landau in seiner Arbeit „On the Theory of Stars“ [Lan32] das Gleichgewicht zwischen der nach innen gerichteten Gravitation und dem nach außen gerichteten quantenmechanischen Druck in ausgebrannten Sternen. Hierbei beschäftigte er sich insbesondere mit der Frage, was mit einem Stern geschehe, der über der so genannten Chandrasekhar-Masse von $1,5 M_{\odot}$ ¹ läge. Ein Jahr vorher konnte Chandrasekhar zeigen [Cha31], dass diese Masse eine obere Grenze für die Stabilität kompakter Sterne darstellt. Dies führte zu reichlich Diskussion in der Fachwelt, an der sich auch Landau mit der oben zitierten Arbeit beteiligte. Unter der Annahme, dass Sterne über der Chandrasekhar-Masse existieren, kam er zu dem Schluss, dass in diesem Fall die Gesetze der Quantenmechanik verletzt werden müssten. Er erwartete, dass dies bei einer Dichte geschehe, bei der sich die Atomkerne zu berühren begännen:

„We expect that this must occur when the density of matter becomes so great that atomic nuclei come in close contact, forming one gigantic nucleus.“

Im Nachhinein erwies sich seine Schlussfolgerung auf die Verletzung der Naturgesetze als nicht haltbar. Stattdessen ist die Chandrasekhar-Masse und der Kollaps zu einem schwarzen Loch eines ausgebrannten Sterns über dieser Masse allgemein anerkannt und Lehrbuchphysik geworden. Trotzdem brachte Landau mit dem obigen Zitat als erster die Idee eines Neutronensterns in Form eines kilometergroßen Atomkerns ins Spiel.

¹Mit M_{\odot} wird die Sonnenmasse von $1,9884 \cdot 10^{33}$ g bezeichnet.

1932 entdeckte Sir James Chadwick das Neutron als neues Elementarteilchen und veröffentlichte seine sensationellen Ergebnisse zunächst in [Cha32a] und anschließend ausführlicher in [Cha32b]. Noch am gleichen Abend als diese Neuigkeit Kopenhagen erreichte, kam Landau in einer Diskussion mit Bohr die Idee von kalten, dichten Sternen, die vornehmlich aus Neutronen bestünden, der jedoch keine Veröffentlichung zu diesem Thema folgte.

Die Entdeckung des Neutrons wurde in der gesamten Forschung schnell aufgegriffen und weiterentwickelt, so dass bereits nur zwei Jahre später als erstes von den beiden Astronomen Walter Baade und Fritz Zwicky in [BZ34b, BZ34a] die mögliche Existenz eines Neutronensterns und eine Theorie zu dessen Entstehung schriftlich vorgeschlagen wurde:

„With all reserve we advance the view that a supernova represents the transition of an ordinary star into a neutron star, consisting mainly of neutrons. Such a star may possess a very small radius and an extremely high density.“

Die rechnerische Überprüfung dieser Aussagen über die Eigenschaften von Neutronensternen erforderte eine neue Lösung der Grundgleichung der allgemeinen Relativitätstheorie, die 1939 Oppenheimer und Volkoff erbrachten [OV39]. Unter der Annahme eines idealen Neutronengases fanden sie in dieser wegweisenden Rechnung eine Maximalmasse von $0,71 M_{\odot}$ bei einem Radius von 9,5 km.

Die Astrophysik dieser Epoche wurde geprägt durch die Suche nach der Quelle der stellaren Energie. Als klar wurde, dass Neutronenstern-Kerne im Inneren normaler Sterne als Energiequelle ausgeschlossen werden konnten, und auf der anderen Seite die thermonukleare Fusion immer besser verstanden wurde, trat die Neutronenstern-Physik zurück in den Hintergrund. Des Weiteren war es gängige Meinung, dass aufgrund ihrer geringen Größe die verbleibende thermische Strahlung eines Neutronensterns zu schwach sei, um jemals beobachtet werden zu können, so dass auch keine Anstrengungen in dieser Hinsicht unternommen wurden. Es dauerte über 30 Jahre bis mit der unerwarteten, zufälligen Entdeckung des ersten Pulsars die weit vorausschauenden Theorien der 30er Jahre durch Beobachtung (allerdings tatsächlich nicht im optischen Bereich) bestätigt werden konnten.

Die Entdeckung des ersten Pulsars

Eine Gruppe von Radioastronomen der Cambridge-Universität um Anthony Hewish entdeckte 1967 ein astronomisches Objekt, das periodische Pulse mit einer Frequenz von 1,377 ms im Radiobereich emittierte [HBP⁺68]. Jocelyn Bell, eine Studentin von Hewish, bemerkte bei der Analyse der Daten, die eigentlich zur Studie der Population und Verteilung von Quasaren gesammelt wurden, große Fluktuationen im

Signal, die an aufeinanderfolgenden Tagen zum ungefähr gleichen Zeitpunkt auftraten. Hewish interpretierte diese zunächst als oft auftretende, bekannte irdische Interferenzen, verursacht z. B. durch einen vorbeifahrenden Automotor, so dass diese Entdeckung beinahe als bedeutungsloser Untergrund verworfen worden wäre. Tatsächlich stellte sich im Nachhinein sogar heraus, dass bereits Jahre vor Hewishs und Bells Entdeckung Pulsar-Signale durch das Jodrell-Bank-Radioobservatorium aufgezeichnet, aber nicht bemerkt worden waren [LG98]. Nachdem Hewish und seine Mitarbeiter bei genauerer Analyse eine Systematik der Fluktuationen feststellten, waren sie sich aber sicher, dass es sich um ein Signal außerterrestrischen Ursprungs handeln musste. Doch was war dessen Quelle? Sollte dies gar die erste empfangene Botschaft einer fremden Zivilisation sein? Dass es der Forschung gelang, die Antwort auf diese Frage schnell zu finden, liegt in der dieser Entdeckung vorangehenden theoretischen Vorarbeit begründet, die ursprünglich aber aus anderer Motivation heraus geleistet wurde.

Identifikation der Pulsare

Anfang der 60er Jahre erlebte das Konzept des Neutronensterns mit dem Beginn der Röntgenastronomie einen neuen Aufschwung. In den 50er Jahren wurden die ersten raketengebundenen Beobachtungen im Röntgenbereich durchgeführt. Schließlich wurde 1962 durch Riccardo Giacconi mit einer Aerobee-150-Rakete die erste kosmische Röntgenquelle, Scorpius X-1, identifiziert. Es folgten eine Vielzahl weiterer Experimente, die neue sensationelle astronomische Entdeckungen liefern konnten.

Neutronensterne und weiße Zwerge in akkretierenden, binären Systemen waren als mögliche Quellen beobachtbarer Röntgenstrahlung im Gespräch, so dass neue theoretische Anstrengungen in der Neutronenstern-Physik unternommen wurden. In der Arbeit [HNW64] schätzten Hoyle, Narlikar und Wheeler, dass durch die Erhaltung des magnetischen Flusses bei der Kontraktion des Vorgängersterns zu einem Neutronenstern ein Magnetfeld von bis zu 10^{10} G entstehen würde. Neben der Sonne war der Krebsnebel das erste astronomische Objekt, dass in den Fokus der neuen Röntgenastronomie fiel und in dessen Zentrum solch ein Neutronenstern vermutet wurde. Abb. 1.1 zeigt eine aktuelle Aufnahme des Krebsnebels im optischen und im Röntgenbereich.

Nach Hewishs Entdeckung der periodischen Radioquelle wurde mit Erfolg nach weiteren dieser Objekte gesucht, die man wegen ihres gepulsten Signals schon bald als „Pulsare“ bezeichnete. Auch im Zentrum des Krebsnebels konnte solch ein Pulsar identifiziert werden, ein experimenteller Befund, der den Wissenschaftlern den entscheidenden Hinweis lieferte.

Schon 1967 leistete Franco Pacini in [Pac67] die wesentliche theoretische Vorarbeit, die zur Identifikation der periodischen Radioquelle im Zentrum des Krebsnebels



Abbildung 1.1: Eine kombinierte Aufnahme des Krebsnebels im optischen Bereich (rot) durch das Hubble Space Telescope und Röntgenbereich (blau) durch das Chandra X-ray Observatory. Bild entnommen der „HubbleSite-Gallery“ (<http://hubblesite.org/gallery>).

führen sollte. In dieser Veröffentlichung zeigte er, dass ein schnell rotierender Neutronenstern mit einem starken magnetischen Dipolfeld als hochenergetischer elektrischer Generator für die Energiequelle des Krebsnebels in Frage käme. Schließlich war es Gold, der 1968 in einem ebenfalls in *Nature* veröffentlichten Brief mit dem so genannten „Leuchtturm-Modell“ zeigen konnte, dass der Ursprung des pulsierenden Radiosignals das rotierende Magnetfeld des Neutronensterns sein könnte, und der somit als erstes Pulsare als rotierende Neutronenstern identifizierte [Gol68].

Das Leuchtturm-Modell

Das von Gold begründete „Leuchtturm-Modell“ ist in Abb. 1.2 schematisch dargestellt und soll hier kurz erläutert werden: Durch das starke magnetische Feld von ($10^{10} - 10^{13}$) G werden geladene Teilchen, wie z. B. Elektronen, entlang der magnetischen Feldlinien beschleunigt, was zur Abstrahlung elektromagnetischer Strahlung oberhalb der Magnetpole in Form eines Doppelkegels entlang der Magnetfeldachse führt. Im Allgemeinen fallen Magnetfeld- und Rotationsachse nicht zusammen. Die Eigenrotation des Neutronensterns führt zu einer Rotation der Magnetpole und der

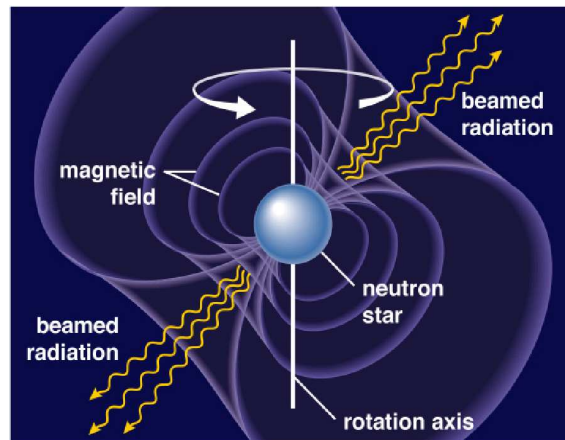


Abbildung 1.2: Das Leuchtturm-Modell eines rotierenden Neutronensterns mit nicht kollinearer Magnetfeld- und Rotationsachse zur Beschreibung der charakteristischen Pulsar-Emission.

Strahlungskegel. Liegt ein Beobachter zufällig in der Sichtlinie des rotierenden Strahlungskegels, wird dieser in gleichmäßigen Abständen vom Strahlungskegel überstrichen. Der Beobachter vernimmt elektromagnetische Pulse mit einer Frequenz, die gerade der Rotationsperiode entspricht. Ähnlich wie bei der Erhaltung des magnetischen Flusses führt die Drehimpulserhaltung beim Kollaps zum Neutronenstern zu extrem hohen Rotationsperioden bis in den ms-Bereich, die der Beobachter wahrnimmt.

Masse

Mittlerweile sind ungefähr 1700 Pulsare, also astrophysikalische Objekte, die periodische Radio- oder Röntgenpulse aussenden, bekannt und katalogisiert. Viele dieser Pulsare befinden sich in binären Systemen, bei denen der Pulsar von einem weiteren kompakten Objekt, wie einem weißen Zwerg, Neutronenstern oder schwarzen Loch, oder einem Hauptreihenstern begleitet wird. Aus einem Effekt der Dopplerverschiebung kann die Orbitalgröße und Periode des binären Systems ermittelt und aus diesem die totale Masse des Systems abgeleitet werden. Unter bestimmten Umständen erlaubt es die Kompaktheit des Systems über relativistische Effekte wie der Shapiro-Verzögerung [Sha64], oder der Verkleinerung des Orbits durch Abstrahlung von Gravitationswellen, die separaten Massen der beiden Partner zu ermitteln. Abb. 1.3 zeigt die aus [TC99] stammende Massenverteilung von 19 Radiopulsaren aus binären Systemen mit verschiedenen Begleitern. Eine genauere Untersuchung der Verteilung zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit einer Gauß'schen Verteilung um den Mittelwert von $M = 1,35 M_{\odot}$.

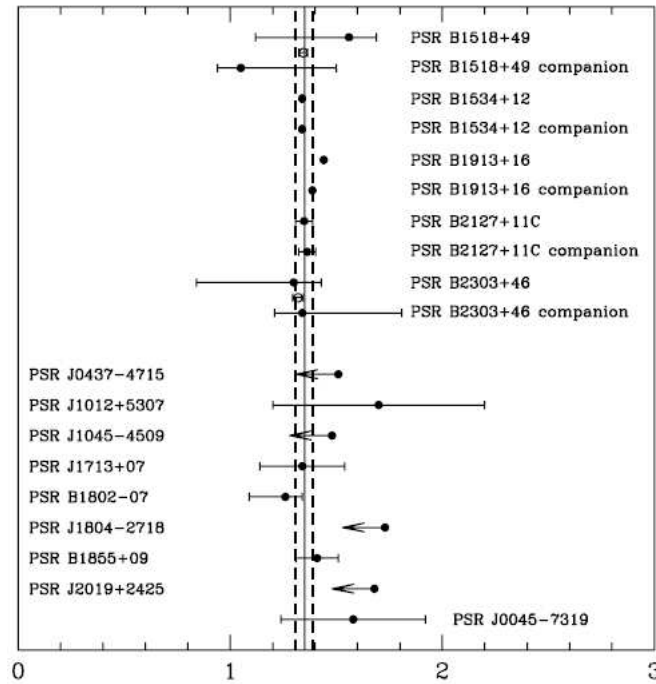


Abbildung 1.3: Neutronensterne aus Beobachtungen von Radiopulsar-Systemen mit den zugehörigen 68 % Fehlerbalken, einseitige Fehlerbalken geben das 95 %-Vertrauens-Intervall an. Die ersten zehn Messungen stammen aus fünf Doppel-Neutronensterne-Systemen, es folgen acht Neutronensterne-weißer-Zwerg-binäre-Systeme, der unterste Neutronenstern hat einen Hauptreihenstern als Begleiter. Die vertikalen Linien zeigen $M = (1,35 \pm 0,04) M_{\odot}$.

Radius

Aufgrund ihrer für astronomische Verhältnisse winzigen Ausdehnung und gleichzeitiger großen Entfernung gestaltet sich im Gegensatz zur Massenmessung jede Bestimmung des Radius ausgesprochen schwierig. Kann die Temperatur eines Neutronensterns anhand des elektromagnetischen Spektrums bestimmt werden, so ist es bei bekannter Entfernung des Objekts möglich einen Radius zu ermitteln. Dieses Verfahren ist allerdings von vielen Unsicherheiten geprägt. Viele Spektren von Neutronensternen zeigen ein ausgesprochen nicht-thermisches Verhalten, oder andere ungewöhnliche Eigenschaften, für die es bisher keine schlüssigen Modelle gibt. Des Weiteren ist eine direkte Abstandsmessung über die Parallaxe nur für sehr wenige Pulsare durchführbar. In allen anderen Fällen muss für die Abstandsmessung auf kompliziertere Verfahren zurückgegriffen werden, die ihrerseits ebenfalls von weiteren Annahmen abhängen.

Das Beispiel RXJ1856

Ein gutes Beispiel für die angesprochene Problematik ist der 1992 durch den Rosat-Satelliten entdeckte Neutronenstern RXJ1856. Eine erste Parallaxenmessung durch das Hubble-Weltraumteleskop ergab eine Entfernung von 61 pc [Wal01]², aus der man einen überraschend kleinen Radius von nur 6 – 9 km errechnete, abhängig von der angenommenen Masse des Neutronensterns und dem verwendeten Modell zur Beschreibung des Spektrums [PWL⁺02]. RXJ1856 wurde aufgrund dieses kleinen Radius als der erste Beweis der Existenz einer besonderen Gattung von Neutronensternen, so genannten „Quarksternen“ (siehe Abschnitt 1.2.1) ausgerufen. Doch schon bald entstanden Zweifel an dieser Interpretation. Mit neuen Daten des Hubble-Space-Teleskops und einer überarbeiteten Analyse wurde schließlich die Entfernung um beinahe Faktor Zwei auf 117 pc korrigiert [KvA02, WL02]. Weitere Messungen des Spektrums im optischen und Röntgenbereich legten eine anisotrope Temperaturverteilung nahe, mit der Trümper et al. einen Radius von 14 km für eine Masse von $M = 1,4 M_{\odot}$ ermittelten [TBHZ04], so dass RXJ1856 mittlerweile als Quarkstern ausgeschlossen werden kann.

Bedeutung für die Physik

Das Beispiel von RXJ1856 zeigt aber auch die Bedeutung der Neutronensterne für die moderne Hochenergie- und Teilchenphysik. Mit Radien von ~ 12 km, Massen von $\sim 1,4 M_{\odot}$ und zugehörigen inneren Dichten von fünf- bis zehnfacher Dichte gewöhnlicher Kerne im Labor, gehören Neutronensterne zu den dichtesten Formen von Materie im beobachtbaren Universum. Die einzigartige Verbindung von mikroskopischer Physik, die Auswirkungen auf über Lichtjahre hinweg beobachtbare makroskopische Eigenschaften hat, erlaubt es Neutronensterne als Laboratorien zur Erforschung hochdichter Materie unter Bedingungen zu verwenden, die auf der Erde nicht genauso erzeugt werden können.

In den gigantischen Beschleunigeranlagen der Hochenergiephysik, wie dem LHC am CERN in Genf oder dem RHIC in Brookhaven, werden in Schwerionenkollisionen ähnliche Zustände erzeugt, wie sie sonst nur in astrophysikalischen Szenarien vorliegen. In diesen Kollisionen werden allerdings nicht die extremen Dichten des Inneren von Neutronensternen, sondern vor allem hohe Temperaturen erreicht, und dies auch nur beschränkt auf das wenige fm große Kollisionsgebiet und für den kurzen Zeitraum von $\sim 10^{-22}$ s. Trotzdem ist es über komplexe theoretische Modellbildung möglich, aus diesen Experimenten auch Rückschlüsse auf die Eigenschaften von Neutronensternmaterie zu ziehen, die wiederum mit den Erkenntnissen aus Astronomie

²Das Parsec (pc) ist eine astronomische Längeneinheit und ist definiert als die Entfernung, von der aus betrachtet der mittlere Abstand der Erde von der Sonne unter einem Winkel von einer Bogensekunde erscheint, und entspricht damit 3,26 Lichtjahren.

und Astrophysik konfrontiert werden können.

So kann z. B. aus der Zustandsgleichung für hochdichte Materie über numerische Rechnungen die Masse-Radius-Beziehung eines Neutronensterns ermittelt werden. Hierbei findet man eine maximale Masse über der ein Neutronenstern instabil wird und zu einem schwarzen Loch kollabiert, die direkt von dem verwendeten Elementarteilchenmodell abhängt. Die untere erlaubte Grenze für die Maximalmasse ist durch den schwersten bisher beobachteten Neutronenstern, den Hulse-Taylor-Binärpulsar PSR 1913+16, mit einer Masse von $(1,4408 \pm 0,0003) M_{\odot}$ gegeben [WT03]. Ein Wert von über $3 M_{\odot}$ würde die in der speziellen Relativität begründete Kausalität verletzen, d. h. die Schallgeschwindigkeit im Neutronenstern wäre größer als die Lichtgeschwindigkeit c [RR74].

Anhand der Beobachtung von Neutronensternen können also theoretische Modelle überprüft und sogar ausgeschlossen werden, wenn die beobachteten Daten nicht mit der Theorie vereinbar sind. Umgedreht können experimentelle Ergebnisse dazu verwendet werden, Neutronensterne und deren komplexe Phänomenologie präziser zu beschreiben. Neutronenstern-Physik ist immer das Zusammenspiel von astrophysikalischer Beobachtung, theoretischer Kern-, Teilchen- und Astrophysik und den experimentellen Erkenntnissen der modernen Forschungsanlagen hier auf der Erde.

Auch in dieser Arbeit werden experimentelle Resultate in Form der Massenmessung neutronenreicher Isotope dazu verwendet, die Zusammensetzung und Eigenschaften eines Teils des Neutronensterns, nämlich der äußeren Kruste, zu bestimmen. Bevor im Detail auf das verwendete Modell zur Berechnung der äußeren Kruste eingegangen wird, soll aber zunächst die Entstehung eines Neutronensterns und dessen Struktur beschrieben werden.

1.1 Entstehung

Neutronensterne entstehen aus dem Überrest eines kollabierten gewöhnlichen Sterns mit einer Masse größer als $8 M_{\odot}$.

1.1.1 Ein Stern im Endzustand

Sterne erzeugen ihre Energie aus der thermonuklearen Fusion leichter Elemente zu stärker gebundenen, wie z. B. Wasserstoff zu Helium oder Helium zu Kohlenstoff und Sauerstoff. Wasserstoff bildet mit 76 % Massenanteil das häufigste Element des Universums, gefolgt von Helium mit einem Anteil von 23 %. Die schwereren Elemente tragen nur weniger als 1 % zur Gesamtmasse des Universums bei. Demnach besteht ein junger Stern, der sich aus dem interstellaren Medium gebildet hat, zunächst zum

größten Teil aus Wasserstoff und Helium.

Damit zwei Atomkerne miteinander fusionieren können, müssen diese die durch ihre Ladung hervorgerufene Coulomb-Barriere überwinden. Die geringste Energiebarriere besitzt demnach die Fusion von Wasserstoff zu Helium, des Weiteren ist Helium ein besonders stark gebundenes Element, was diese Reaktion weiterhin begünstigt. Ab einer gewissen kritischen Dichte und Temperatur sind ausreichend viele hochenergetische Ionen vorhanden, die in der Lage sind die Coulomb-Barriere zu überwinden, um im Kern des Sterns das Wasserstoffbrennen zu zünden. Aufgrund des größeren spezifischen Gewichts sammelt sich das Helium im Zentrum an, so dass das Wasserstoffbrennen in einer Schale um diesen Heliumkern herum stattfindet, die dabei mit der Zeit nach außen wandert. Ist der Stern ausreichend dicht und heiß, so schließt sich im Zentrum des Sterns die Fusion des Heliums an. Für schwerere Sterne findet man eine regelrechte Schalenstruktur mit nach innen immer schwerer werdenden Elementen, die in den einzelnen Schalen weiter fusioniert werden.

Die finale Entwicklung des Sterns hängt entscheidend von seiner Masse ab. Sterne unter $8 M_{\odot}$ erreichen im wesentlichen nur das Heliumbrennen und über $2,5 M_{\odot}$ das Kohlenstoffbrennen. Bei diesen Sternen laufen die Fusionsprozesse größtenteils thermisch instabil oder sogar explosiv in der Form so genannter „Flashes“ ab. Der Stern bläht sich dabei zu einem roten Riesen auf das 100fache seiner ursprünglichen Größe aus. Die anhaltende Expansion mit abnehmender gravitativer Bindung führt zusammen mit den Flashes zu einem Abstoßen der äußeren Hülle, aus der ein planetarischer Nebels gebildet wird. Mit dem Erlöschen der letzten Brennvorgänge verbleibt der Kern des ausgebrannten Sterns, der hauptsächlich aus ^{12}C und ^{16}O besteht. Liegt dessen Masse unter der Chandrasekhar-Masse, so bildet sich in der Kontraktion ein neuer stabiler Endzustand, ein weißer Zwerg, der durch den Entartungsdruck der Elektronen im Gleichgewicht gehalten wird.

Bei Sternen mit Massen über $8 M_{\odot}$ verläuft das Kohlenstoffbrennen hydrostatisch, in immer kürzeren Zeiträumen Neon-, Sauerstoff- und Siliziumbrennen. Eisen, das als „Asche“ in diesen Fusionsreaktion gebildet wird, stellt das am stärksten gebundene Element des Universums dar, so dass unabhängig von der Masse des Sterns mit Eisen keine weitere Fusion mehr möglich ist. Mit Entstehung des Eisenkerns kommt jeder Stern im Laufe seiner Evolution an den Punkt, an dem alle möglichen Fusionsprozesse weitestgehend erschöpft sind. Es kommt zum Gravitationskollaps bei dem der Stern als Typ-II-Supernova explodiert.

1.1.2 Supernova-Explosion

Ein stabiler Stern befindet sich im hydrostatischen Gleichgewicht zwischen der nach innen gerichteten eigenen Gravitation und dem nach außen gegenhaltenden inneren Druck. Der innere Druck besteht neben dem Gasdruck der Materie des Sterns

aus dem Strahlungsdruck, d. h. dem Druck, den die in der thermonuklearen Fusion freiwerdenden Photonen erzeugen. Kommen die nuklearen Brennvorgänge, wie oben beschrieben, zum Erliegen, so führt dies zu einer schlagartigen Aufhebung des Gleichgewichtszustandes, da der Strahlungsdruck im Kern nahezu wegfällt. Es kommt zum Gravitationskollaps bei dem der Stern als Typ-II-Supernova explodiert.

Zunächst implodiert der Kern des Vorgängersterns schlagartig auf Größen von 20 bis 30 km, und die äußeren Schichten fallen als Akkretions-Stoßwelle in Richtung Zentrum. Sobald im Inneren ungefähr die nukleare Grundzustandsdichte erreicht wird, wird die dort vorliegende Materie höchst inkompressibel. Die Implosion wird gestoppt und die einfallende Druckwelle am Kern reflektiert. Es entsteht eine neue Stoßwelle, die 100 bis 200 km nach außen wandert, bevor diese aufgrund des Energieverlusts beim Durchschreiten der Materie des Vorgängersterns zum Stehen kommt. Der nun folgende Explosionsmechanismus einer Kernkollaps-Supernova ist Gegenstand aktueller Forschung und immer noch nicht komplett verstanden, allerdings geht man davon aus, dass Neutrinos eine entscheidende Rolle spielen. Dies erscheint zunächst verwunderlich, da Neutrinos als nur schwach wechselwirkende Teilchen die geringsten Wirkungsquerschnitte von typischerweise $\sigma \sim 10^{-40} \text{ cm}^2$ aufweisen. Hier muss allerdings berücksichtigt werden, dass über 99 % der gigantischen freiwerdenden Gravitationsenergie von

$$E = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \sim -3 \cdot 10^{53} \text{ erg} \quad (1.1)$$

in Form von Neutrinos abgestrahlt wird, was die Bedeutung der Neutrinos plausibel macht. Obige Gleichung beschreibt die Gravitationsenergie einer homogenen Kugel mit konstanter Dichte, berechnet mit Newtons Gravitationskonstante G für einen verbleibenden Neutronenstern mit einem Radius $R = 10 \text{ km}$ und einer Masse $M = 1,4 M_\odot$. 1 erg stellt dabei die in der Astrophysik oft verwendete Energieeinheit des cgs-Systems dar ($1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$).

In Verbindung mit weiteren Effekten des Magnetfeldes, der Rotation oder der Konvektion, verursachen die Neutrinos, die den inneren Bereich verlassen, eine Regenerierung der Stoßwelle, die den verbliebenen massiven Mantel des Sterns innerhalb von Sekunden nach außen wegbläst. Dies stellt eines der gewaltigsten Ereignisse des Kosmos dar, und überstrahlt dabei mit der 10^{10} -fachen Leuchtkraft der Sonne sogar ganze benachbarte Galaxien. Die 1054 stattgefundenene Supernova-Explosion, aus welcher der Krebsnebel hervorging, war selbst am helllichten Tag mit bloßem Auge am Himmel sichtbar, wie Aufzeichnungen der Chinesen belegen.

1.1.3 Geburt des Neutronensterns

Als Kern verbleibt der so genannte „Proto-Neutronenstern“ (PNS) mit einer Masse von ungefähr $0,7 M_\odot$ und einem Radius $R \sim 20 \text{ km}$, der einen hohen Anteil an

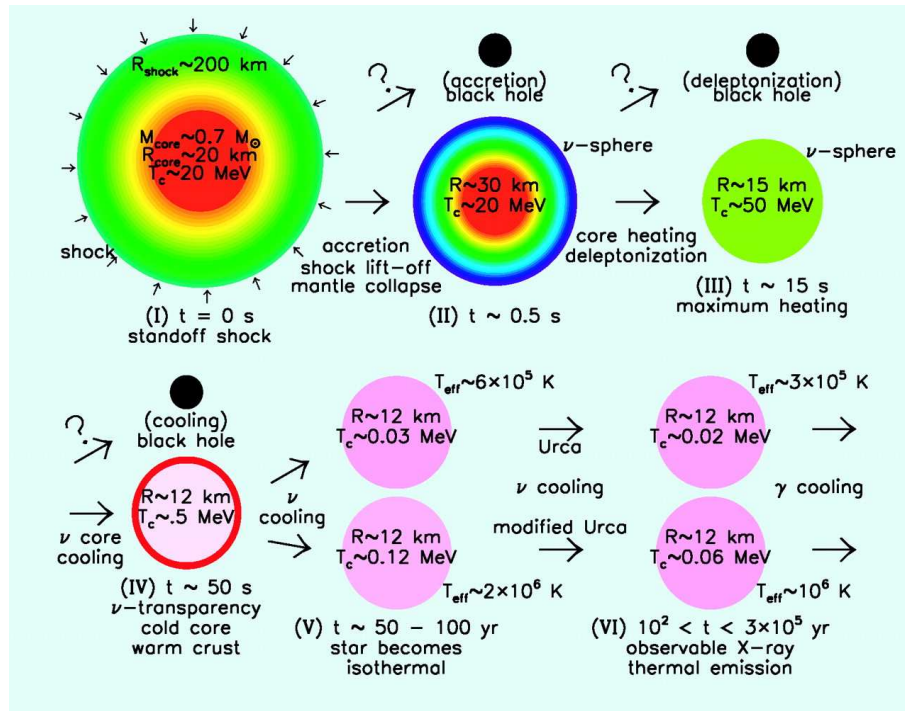


Abbildung 1.4: Die wichtigsten im Text beschriebenen Evolutionsstufen eines Neutronensterns, gekennzeichnet mit römischen Zahlen. Die Entwicklung des Radius R und der zentralen Temperatur T_c mit der Zeit t ist in der Grafik angegeben.

Leptonen in Form von e^- und ν_e aufweist und dessen Evolutionsstufen in Abb. 1.4 schematisch dargestellt sind. Der Kern ist von einem 200 km großen Mantel aus Material des Vorgängersterns umgeben. Im Inneren des Kerns kommt es zum Phänomen des „Neutrino-Trappings“: Bei den vorliegenden extrem hohen Dichten erhält man trotz der geringen Wirkungsquerschnitte der Neutrinos erstaunlich kleine mittlere freie Weglängen von $\lambda \sim 10$ cm. Diese sind deutlich kleiner als der Radius des verbleibenden Kerns, so dass die Neutrinos den Kern nur langsam durch Diffusion verlassen können und zunächst im Inneren gefangen sind (Stufe I).

Nach 0,5 s kommt es durch die fortschreitende Neutrino-Emission und Elektrophotoneinfangsreaktionen zu einem raschen leptonischen Druckabfall in den Randbereichen, der den Kollaps des Proto-Neutronenstern-Mantels nach sich zieht (Stufe II). Der PNS akkretiert die einfallende Materie und wird dabei zunehmend dichter, gleichzeitig werden Elektron-Proton-Paare in Neutronen umgewandelt. Diese Deleptonisierung zusammen mit der Streuung der hochenergetischen Neutrinos, führt trotz der anhaltenden Neutrino-Emission nach ca. 15 s zu einer maximalen Erwärmung des PNS auf ~ 50 MeV bei gleichzeitiger Kontraktion auf ungefähr 15 km (Stufe III).

Nach 10 bis 20 s ist die Akkretion weitestgehend abgeschlossen, nun gewinnt die Neutrino-Strahlung die Überhand und beginnt den PNS langsam herunter zu kühlen. Die freie Weglänge der Neutrinos ist umgekehrt proportional zum Quadrat ihrer Energie, $\lambda \propto 1/E_\nu^2$, so dass nach ungefähr 50 s bei einer Temperatur von ~ 1 MeV die Bedingung $\lambda > R$ erreicht ist. Der PNS wird transparent für die Neutrinos, diese können ihn ungehindert verlassen, was zu einem raschen Anstieg der Kühlrate führt (Stufe IV).

Nicht in jeder Supernova-Explosion eines ausreichend schweren Sterns muss ein Neutronenstern übrig bleiben. Der neu entstandene PNS kann durch die Akkretion des zurückfallenden Materials der Stoßwelle, durch die Deleptonisierung oder durch das stetige Abkühlen mit daraus folgendem Druckabfall die Maximalmasse überschreiten und weiter zu einem schwarzen Loch kollabieren (Stufen II-IV).

Überlebt ein PNS diese ersten Phasen des Kühlens, dauert es weitere 50 bis 100 Jahre bis Neutrino-Emission aus dem Inneren, thermale Evolution der Kruste und Wärmetransport der Elektronen zu einer Isothermalisierung des PNS geführt haben (Stufe V).

Die von Stufe IV zu Stufe V in der Kruste stattfindenden und für diese Arbeit besonders interessanten Veränderungen werden in Abschnitt 1.1.5 näher erläutert. Der PNS emittiert auch Photonen, und zwar hauptsächlich im Röntgenbereich mit einer effektiven Temperatur, die ungefähr Faktor 100 unter der inneren Temperatur liegt. Bis zu einem Alter von $3 \cdot 10^5$ Jahren bleibt aber die Neutrino-Emission die dominante Form des Energieverlusts (Stufe VI).

Die einfachste und effektivste Form des Neutrino-Kühlens stellt der so genannte direkte „Urca-Prozess“³ dar [Pet92], bei dem angeregte Nukleonen durch β - und inversen β -Zerfall thermische Energie in Form von Neutrinos abstrahlen:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (1.2)$$

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e . \quad (1.3)$$

Diese Prozesse sind wegen Impuls- und Energieerhaltung allerdings nur unter bestimmten Bedingungen möglich. Aus der Ladungsneutralität des Neutronensterns folgt, dass die Elektronen und Protonen denselben Fermi-Impuls besitzen:

$$n_p = n_e \longleftrightarrow p_{F_p} = p_{F_e} , \quad (1.4)$$

wobei n_p bzw. n_e die Anzahldichte der Protonen bzw. Elektronen beschreibt. Da die Elektronen, Neutronen und Protonen entartet sind und sich im chemischen Gleichgewicht befinden,

$$\mu_n = \mu_e + \mu_p , \quad (1.5)$$

³Der Name Urca stammt ursprünglich von einem einst glamourösen Casino in Rio de Janeiro, in dem die Spieler ihr Geld so schnell verspielten, wie Neutronensterne ihre Energie über Neutrinos verlieren.

kann z. B. ein Neutron nur dann gemäß Glg. (1.2) zerfallen, wenn es durch eine nicht verschwindende Temperatur auf ein Niveau geringfügig ($\sim k_B T/c \ll p_{F_n}$) oberhalb der Fermi-Energie angeregt wurde. Unter Vernachlässigung des Impulses des auftretenden Antineutrinos, der gerade der davongetragenen thermischen Energie $k_B T$ entspricht, erhält man aus Glg. (1.2) folgende Reaktionskinematik:

$$p_{F_n} \leq p_{F_p} + p_{F_e} = 2p_{F_p} . \quad (1.6)$$

Mit $n_i = p_{F_i}^3 / (3\pi^2 \hbar^3)$ ergibt sich nun:

$$n_n \leq 8n_p , \quad (1.7)$$

d. h. der direkte Urca-Prozess ist nur möglich, wenn das Verhältnis von Protonen zu Neutronen $1/8$ überschreitet. In den meisten Fällen wird dieser Wert aber gar nicht oder erst oberhalb einer kritischen Dichte erreicht, so dass der direkte Urca-Prozess nicht stattfindet. An dessen Stelle tritt der indirekte Urca-Prozess, bei dem weitere Nukleonen an der Streuung beteiligt sind, welche die uneingeschränkte Impuls- und Energieerhaltung ermöglichen:

$$n + (n, p) \rightarrow p + (n, p) + e^- + \bar{\nu}_e \quad (1.8)$$

$$p + (n, p) \rightarrow n + (n, p) + e^+ + \nu_e . \quad (1.9)$$

Da nun zusätzliche Teilchen in der Streuung auftreten, erhält man einen zusätzlichen Phasenraumfaktor $\propto (T/k_F)^2$, der zu einer Unterdrückung des indirekten gegenüber dem direkten Urca-Prozess um Faktor 10^{-4} bis 10^{-5} führt. Man spricht daher auch vom Standard- und dem verstärkten (englisch: enhanced) oder dem langsamen und dem schnellen Kühlen. Im Standardszenario wird davon ausgegangen, dass der direkte Urca-Prozess nicht auftritt, und das Neutronensterne daher mehrere Millionen Jahre anhand ihrer thermischen Emission von der Oberfläche beobachtbar sein sollten.

1.1.4 Pulsar-Kicks

Viele der beobachteten Pulsare weisen extrem hohe Eigengeschwindigkeiten von 100 bis 1000 km/s auf, bisher sind sogar zwei Pulsare mit Geschwindigkeiten von über 1400 km/s bekannt [HLLK05]. Des Weiteren wurde bei einigen Pulsaren eine Ausrichtung zwischen ihrer Bewegungsrichtung und Rotationsachse festgestellt [JHV⁺05]. Dieses Phänomen der ungewöhnlich schnellen und ausgerichteten Eigengeschwindigkeit der Pulsare wird als die so genannten „Pulsar-Kicks“ bezeichnet. Zur Erklärung dieses Phänomens gibt es verschiedene konkurrierende Theorien.

Eine Möglichkeit ist die Annahme einer leichten Asymmetrie in der vorangehenden Supernova-Explosion, die zu einem Netto-Impulsübertrag auf den Pulsar führt.

Dieses Modell ist aufgrund der gigantischen freiwerdenden Energiemengen attraktiv, allerdings gibt es bis heute erhebliche Probleme mit der erfolgreichen Modellierung von Supernovae. Insbesondere die Regenerierung der Stoßwelle bereitet große Schwierigkeiten: die Supernovae „explodieren“ nicht. In manchen Fällen wird eine Explosion erreicht, indem die Neutrino-Wirkungsquerschnitte oder -Luminositäten künstlich erhöht werden. Neben physikalischen Effekten könnten die Schwierigkeiten auch damit verbunden sein, dass man sich aufgrund der Komplexität der numerischen Berechnung auf zweidimensionale Modelle beschränken muss. Somit sind die in diesen Simulationen ermittelten Geschwindigkeiten von bis zu 1000 km/s [SKJM06] noch unter Vorbehalt zu betrachten. Des Weiteren wird die für einige Neutronensterne beobachtete Ausrichtung zwischen Kick-Richtung und Rotationsachse nicht erreicht.

Eine andere Erklärung wurde in der Diplomarbeit von Irina Sagert [Sag06] dargestellt, bei der die Eigengeschwindigkeit durch asymmetrische Neutrino-Emission während des Neutrino-Kühlens eines Neutronensterns mit Quarkkern (siehe Abschnitt 1.2) verursacht wird. Da, wie bereits erwähnt, 99 % von den $3 \cdot 10^{53}$ erg der freigesetzten Gravitationsenergie in Form von Neutrinos weggetragen wird, ist auch hier nur ein winziger Bruchteil der Gesamtenergie zur Erzeugung der kinetischen Energie von $\sim 10^{49}$ erg eines Pulsars mit $v \sim 1000$ km/s notwendig. Für dieses Modell sind allerdings extrem hohe Magnetfelder von 10^{17} G im Quarkkern erforderlich, um eine volle Polarisierung der Elektronen als Quelle der Asymmetrie beim Neutrino-Kühlen zu erreichen. Auf der anderen Seite muss die mittlere freie Weglänge der Neutrinos ausreichend groß sein, damit die Neutrinos den Neutronenstern ohne weitere Streuung ungehindert verlassen können. Dies ist z. B. für besondere farbsupraleitende Phasen des Quarkkerns der Fall. In diesem Modell ergibt sich direkt die erwähnte Ausrichtung von Magnetfeld und Geschwindigkeit, und unter den angesprochenen Voraussetzungen ist es möglich, zumindest einen Teilbetrag der Pulsar-Kicks zu erklären.

1.1.5 Formierung der Kruste

Die äußere Hülle des PNS mit Dichten $\rho \leq 10^{14}$ g/cm³, aus der sich die Kruste des Neutronensterns bilden wird, besteht anfänglich aus einer Mischung von schweren und leichten Kernen (wobei von letzteren wegen der überdurchschnittlich hohen Bindungsenergie bevorzugt α -Teilchen auftreten), Neutronen, Protonen, Elektronen, Positronen und Photonen. Die anfänglich hohe Temperatur von 50 MeV oder $5 \cdot 10^{11}$ K in Stufe III erlaubt die Annahme, dass alle exothermen Reaktionen der schwachen, elektromagnetischen und starken Wechselwirkung zwischen diesen Teilchen bis zum vollständigen Abkühlen des Neutronensterns (Stufe VI) stattgefunden haben, und dass sich die Materie im lokalen thermischen Gleichgewicht befindet. Durch pyknonukleare Reaktionen fusionieren die vorhandenen leichten Kerne und Teilchen

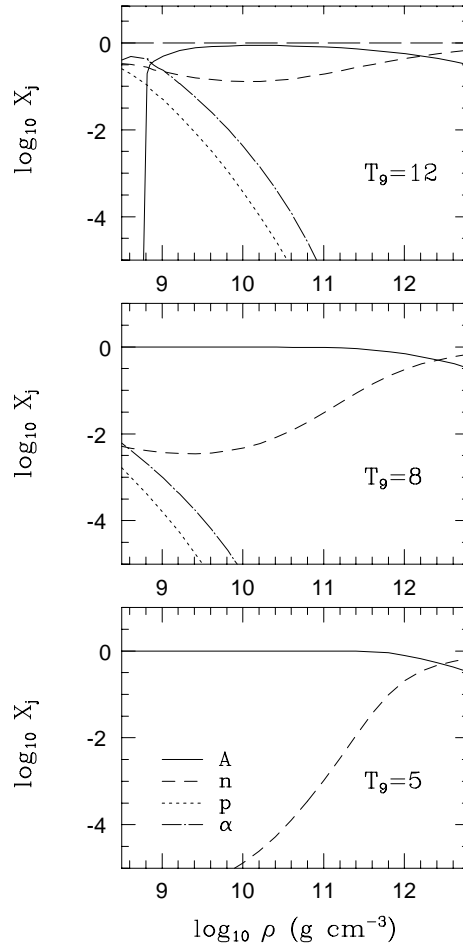


Abbildung 1.5: Massenanteile der einzelnen Bestandteile der äußeren Hülle eines neugeborenen Neutronensterns in Abhängigkeit von der Massendichte bei verschiedenen Temperaturen ($T_9 = T/10^9$ K). Für die Berechnung wurde das Modell von Lattimer und Swesty [LD91] mit dem Kompressionsmodus kalter, symmetrischer Kernmaterie bei Sättigungsdichte von $K_0 = 180$ MeV verwendet [HKY96].

zu stärker gebundenen Elementen wie z. B. Eisen. Die freiwerdende Energie führt zu einer zusätzlichen Erwärmung der Kruste (Stufe IV). Abb. 1.5 zeigt die Evolution der Zusammensetzung der äußeren Hülle eines PNS mit absinkender Temperatur, berechnet in [HKY96] mit dem Lattimer-und-Swesty-Modell [LD91].

Unterhalb von 10^{10} K spielt die Temperatur nur für geringere Dichten als 10^{13} g/cm³ eine Rolle, für größere Dichten im Bereich außerhalb der äußeren Hülle sind thermische Effekte bereits vernachlässigbar klein.

Bei einer Temperatur von $1,2 \cdot 10^{10}$ K existieren für Dichten unter 10^9 g/cm³

keine Kerne mehr. Die Temperatur liegt in diesem Dichtebereich über der kritischen Temperatur, so dass alle Kerne in einem Dampfgemisch von Neutronen, Protonen und α -Teilchen aufgelöst sind. Mit ansteigender Dichte wird der Anteil der Protonen und α 's geringer, der Anteil der Neutronen liegt außer bei den größten Dichten unter dem Anteil der Kerne.

Mit Absinken der Temperatur auf $8 \cdot 10^9$ K nimmt der Anteil der Protonen und α 's weiter ab (Stufe IV). Auch die Neutronen werden weniger, bei $\rho = 10^{10}$ g/cm³ liegt ihr Anteil bei unter 1 %. Kerne sind nun in der gesamten Hülle zu finden. Für große Dichten werden die Auswirkungen des Abkühlens geringer und das Bild ähnelt der Zusammensetzung bei $1,2 \cdot 10^{10}$ K.

Bei der noch kälteren Temperatur von $5 \cdot 10^9$ K ist der einzige sichtbare thermische Effekt das Vorhandensein freier Neutronen auch unterhalb der Dichte des „Neutronen-Drip“ ρ_{ND} . Der Neutronen-Drip ist der Punkt, an dem für $T = 0$ die ersten freien Neutronen erscheinen. Es wird sich zeigen, dass dies für $T = 0$ erst bei $\rho_{ND} \approx 4 \cdot 10^{11}$ g/cm³ geschieht. Bei noch weiterem Abkühlen der Kruste wird dieser Anteil immer geringer, bis nach ca. 50 Jahren freie Neutronen nur noch oberhalb von ρ_{ND} existieren. Weiterhin werden die typischen thermischen Energien so klein, dass Schaleneffekte und die Paarkraft von entscheidender Bedeutung werden.

Schließlich friert nach ungefähr 100 Jahren die Zusammensetzung der Kruste aus und verändert sich nicht mehr mit der fortschreitenden Abkühlung. Sinkt die Temperatur unter die von der lokalen Dichte abhängigen Schmelztemperatur $T_m \sim 80$ keV (siehe Abschnitt 2.3.2), so erstarrt die äußerste Schale des Neutronensterns nach und nach zu einem massiven Kristall und formt dadurch die äußere Kruste. In dieser Arbeit soll genau der Frage nachgegangen werden, wie diese vollständig abgekühlte ($T = 0$), kristalline Kruste, die sich im absoluten Grundzustand im nuklearen und β -Gleichgewicht befindet, zusammengesetzt ist.

1.2 Aufbau und Struktur

Ein nicht akkretierender kalter Neutronenstern kann in fünf verschiedene Regionen unterteilt werden: die Atmosphäre, die äußere Kruste, die innere Kruste, der äußere und der innere Kern. Die Dichte erstreckt sich hierbei über einen großen Bereich – von der Dichte von Eisen mit 7,9 g/cm³ bis zum zehnfachen der Grundzustandsdichte gewöhnlicher Kernmaterie ($\rho_0 \approx 2,4 \cdot 10^{14}$ g/cm³). In Abb. 1.6 ist ein Querschnitt durch einen Neutronenstern mit den einzelnen Regionen schematisch dargestellt.

Der größte Teil der 10^{57} Baryonen eines Neutronensterns ist im Kern konzentriert, so dass dieser den wesentlichen Teil der Masse des Neutronensterns ausmacht. Doch auch die anderen Regionen sind für beobachtbare Physik und zum Verständnis der

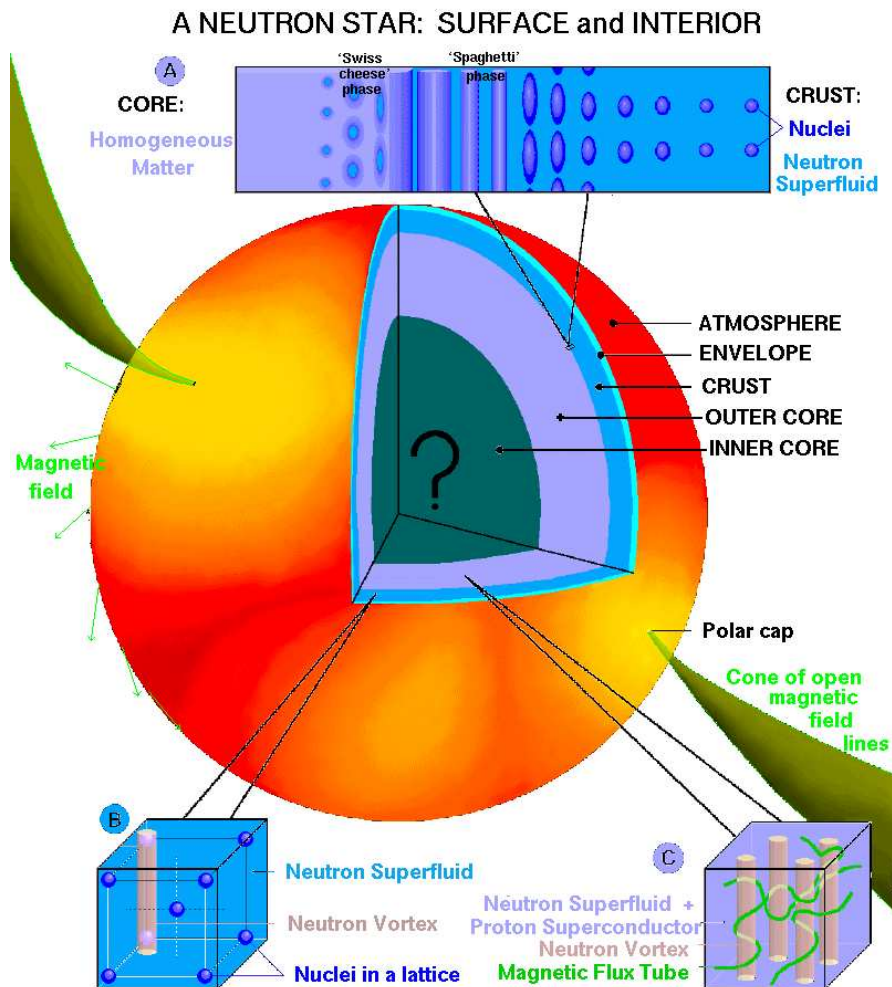


Abbildung 1.6: Querschnitt durch einen Neutronenstern mit den verschiedenen Regionen unterschiedlicher Zusammensetzung. Der obere Balken illustriert den Übergang von Kernen in der inneren Kruste zu homogener Kernmaterie im äußeren Neutronenstern-Kern. Im unteren Bereich sind Aspekte der Suprafluidität dargestellt. Bild entnommen aus der „Neutron Star Picture Gallery“ von D. Page: <http://www.astroscu.unam.mx/neutrones/>.

Zusammenhänge in einem Neutronenstern von entscheidender Bedeutung und zeigen dabei die unterschiedlichsten Phänomene.

Die Atmosphäre ($7,9 \text{ g/cm}^3 \leq \rho \leq 10^4 \text{ g/cm}^3$)

Die Atmosphäre besteht aus Elektronen, Kernen und teilweise ionisierten Atomen, die größtenteils Eisenatome sind, wobei nur ein Teil der Elektronen an die Kerne

gebunden ist. Somit liegt in dieser Region ein plasmaähnlicher Zustand vor, der eine optische Tiefe $\tau \sim 1$ besitzt. Trotz der geringen Dicke von nur ~ 1 cm und der vernachlässigbar kleinen Masse der Atmosphäre ist die als Photosphäre bezeichnete unterste Schicht der Atmosphäre für die Beobachtung besonders wichtig, da hier die letzte Streuung der Photonen im Neutronenstern erfolgt. Somit entsteht in der Atmosphäre das beobachtbare Photonen-Spektrum, dass Rückschlüsse auf die Zusammensetzung der Atmosphäre und die Temperatur des Neutronensterns erlaubt.

Eine oft verwendete Zustandsgleichung der Atmosphäre stammt bereits aus den späten 40er Jahren von Feynmann, Metropolis und Teller [FMT49]. Die Zusammensetzung und Eigenschaften der Atmosphäre sind allerdings auch noch Gegenstand aktueller Forschung, da in den Spektren oft ungewöhnliche Phänomene auftreten, die weiterer Klärung bedürfen. Zusätzlich können bei solch geringen Dichten Temperatur und Magnetfeld die Zustandsgleichung maßgeblich beeinflussen.

Die äußere Kruste ($10^4 \text{ g/cm}^3 \leq \rho \leq 4,3 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$)

Die oberste Schicht der äußeren Kruste wird auch als Hülle oder Oberfläche des Neutronensterns bezeichnet. Aufgrund der extrem starken Gravitation gibt es auf der Oberfläche von Neutronensternen nur Berge, die wenige Millimeter groß sind, alle größeren Erhebungen würden unter ihrer eigenen Schwerkraft kollabieren. Auch ein vorbeikommender Astronaut hätte daher gewisse Schwierigkeiten einen Erkundungsgang auf einem Neutronenstern durchzuführen.

Als der Übergangsbereich zwischen der Atmosphäre und dem Neutronenstern-Kern ist die Kruste für den Transport und die Freisetzung thermischer Energie an der Sternoberfläche von besonderer Bedeutung, und beeinflusst so indirekt auch den beobachtbaren Fluss im Röntgen- und optischen Bereich. Hierbei ist vor allem die Ladungszahl Z der in der Kruste auftretenden Kerne wichtig. Die elektrische Resistivität, die ebenfalls von der Ladungszahl der Elemente in der Kruste abhängt, bestimmt die Ohmsche Dissipation des magnetischen Feldes. Die Zusammensetzung der Kruste äußert sich also auch in der dynamischen Entwicklung des Neutronensterns.

Die Masse der äußeren Kruste ist hingegen nur von untergeordneter Bedeutung. Die Dicke ist typischerweise von der Größe 200 bis 500 m. Dabei sinkt der Anteil der äußeren Kruste mit wachsender Kompaktheit (M/R) des Neutronensterns, wie in Abschnitt 6.3 gezeigt werden wird.

Die äußere Kruste beginnt bei kompletter Ionisation der Atome, die Elektronen bilden dann ein entartetes Fermigas, das sich im β -Gleichgewicht mit den umliegenden Atomkernen befindet. Wegen der vollständigen Ionisation kann die Kruste als temperaturloses ($T = 0$), kaltes Plasma betrachtet werden. Um die

Coulomb-Wechselwirkung der Kerne untereinander und mit den Elektronen zu minimieren, ordnen sich die Kerne in einem festen Gitter an, von denen das kubisch-raumzentrierte Gitter (siehe Abb. 1.7), abgekürzt bcc-Gitter für „body centered cubic“, die energetisch günstigste Form darstellt. Es wird sich zeigen, dass das Gitter nur geringe Auswirkungen auf die Zustandsgleichung hat, aber zu Grundzustandskernen mit größerer Massenzahl A und Ladungszahl Z führt.

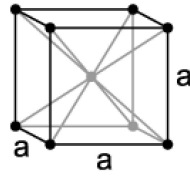


Abbildung 1.7: Die Elementarzelle eines kubisch-raumzentrierten (bcc) Gitters mit Gitterkonstante a .

Die komplette Ionisation tritt ein, wenn der Abstand zwischen den Atomen klein gegenüber ihrer räumlichen Ausdehnung wird. Jeder Elementarzelle eines bcc-Gitters werden zwei Atomkerne zugeordnet, so dass mit der Gitterkonstanten a für die Anzahldicke der Kerne n_N gilt:

$$n_N = 2/a^3 . \quad (1.10)$$

Für die Ausdehnung eines Atoms dient der Thomas-Fermi-Radius als gute Abschätzung,

$$r_{TF} = a_0 Z^{-1/3} , \quad (1.11)$$

wobei a_0 der Bohr-Radius, und Z die Ladungszahl des Atoms ist. Die Massendichte ρ ist im wesentlichen durch die Kerne gegeben, da die Elektronen (noch) als nichtrelativistisch zu betrachten sind. Man erhält mit der atomaren Masseneinheit amu^4

$$\rho \approx A n_N \text{ amu} , \quad (1.12)$$

so dass man folgenden Wert für die Dichte von ^{56}Fe bei $a = 2 r_{TF}$ ermittelt:

$$\rho(a = 2 r_{TF}) \approx 3AZ \text{ g/cm}^3 < 10^4 \text{ g/cm}^3 . \quad (1.13)$$

Das heißt bei einer Dichte von 10^4 g/cm^3 ist die notwendige Bedingung der kompletten Ionisation für den Beginn der äußeren Kruste erfüllt.

⁴1 amu (englisch für „atomic mass unit“) ist 1/12 der Masse eines ^{12}C -Atoms; $1 \text{ amu} \simeq 1,6605 \cdot 10^{-24} \text{ g}$.

Bis zu einer Dichte von $8 \cdot 10^6 \text{ g/cm}^3$ ist aufgrund der höchsten Bindungsenergie aller Elemente des Universums die Kruste aus ^{56}Fe -Kernen aufgebaut. Bei einer Dichte von $\sim 2 \cdot 10^7 \text{ g/cm}^3$ entspricht der Fermi-Impuls der Elektronen gerade ihrer Masse, d. h. die Elektronen beginnen relativistisch zu werden. Nun stellen (von der Dichte abhängig) andere Elemente als Eisen, wie z. B. Nickel oder Zink, den Grundzustand dar. Neutroneneinfangsreaktionen führen dabei zum Auftreten immer neutronenreicherer und exotischerer Kerne, die auch außerhalb des Tals der β -Stabilität liegen. Da alle möglichen Energieniveaus des entarteten Elektronengases bereits besetzt sind, können hierbei sogar im Vakuum instabile Kerne auftreten, da das Pauli-Verbot den β -Zerfall blockiert.

Die innere Kruste ($4,3 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3 \leq \rho \leq 2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$)

Die Kerne der äußeren Kruste werden immer neutronenreicher, bis schließlich keine weiteren Neutronen mehr an den Kern gebunden werden können. Bei einer Massendichte von $\rho_{ND} \approx 4,3 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$ ist der Neutronen-Drip erreicht. Nun ist das baryochemische Potential so groß, dass Neutronen aus den Kernen „heraustropfen“ und ein Gas freier Neutronen bilden. Dies markiert das Ende der äußeren und den Beginn der inneren Kruste.

Demnach besteht die innere Kruste aus neutronenreichen Kernen, eingebettet in einem Gas aus Elektronen und Neutronen. Die Kerne sind dabei nach wie vor in einem Gitter angeordnet. Das neu hinzukommende Neutronengas ist bei Temperaturen unterhalb von $\sim 0,1 \text{ MeV}$ wahrscheinlich in einem 1S_0 suprafluiden Zustand [BP75, BP79], d. h. ohne jegliche innere Reibung und mit idealer Wärmeleitfähigkeit. Aufgrund veränderter spezifischer Wärme und Neutrinoemissivität der Kruste wird das Kühlverhalten durch die Suprafluidität stark beeinflusst. Das suprafluide Neutronengas in Verbindung mit der massiven Kruste dient auch zur Erklärung des Phänomens der „Pulsar-Glitch“ [AI75], einer plötzlichen Veränderung der sonst hochpräzisen Rotationsfrequenz eines Pulsars.

Bereits viele Jahre vor der Entdeckung des ersten Pulsars beschrieb Wheeler in [HWW58] die Form hochdichter Materie, wie sie in der inneren Kruste vorliegt. Mit einfachen semi-empirischen Massenformeln für die Kerne und einem Ausdruck für die Energie des Neutronengases fand man bereits 1965 für den Neutronen-Drip mit $\rho_{ND} \simeq 3 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$ [TC65] eine Dichte sehr nahe an den heutzutage gemeinhin ermittelten Werten. Es folgte die immer noch sehr bekannte Zustandsgleichung von Baym, Bethe und Pethick [BBP71].

Die wesentliche Aufgabe zur Verbesserung der damaligen Arbeiten lag in der vereinheitlichten Beschreibung der Kernmaterie innerhalb der neutronenreichen Kerne und dem Neutronengas außerhalb, es wurde ein einziger geschlossener Ausdruck für die Energiedichte benötigt. So kann die Masse der Kerne in der inneren Kruste

nicht mehr wie im Vakuum berechnet werden: Es kommt zu einer nicht vernachlässigbaren Wechselwirkung des Neutronengases mit den Kernen, an deren Oberfläche sich z. B. zusätzliche Neutronen locker anlagern. Hier stellt die Arbeit von Negele und Vautherin [NV73], die das Hartree-Fock-Verfahren verwendeten, eine der herausragendsten Berechnungen der inneren Kruste dieser Zeit dar. Die Modelle für die innere Kruste können nach der verwendeten Vielkörper-Technik in drei größere Klassen unterteilt werden: Neben der bereits erwähnten Hartree-Fock-Näherung ist es auch möglich ein komprimierbares-Flüssigkeits-Tröpfchen-Modell oder das Relativistic-Mean-Field-Modell in der Thomas-Fermi-Näherung zu verwenden (siehe z. B. [She02]).

Bei Dichten von über $2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ sind alle Kerne komplett in ihre Bestandteile aus Neutronen und Protonen aufgelöst, womit die innere Kruste endet. Der Übergangsbereich von Kernen zu homogener Kernmaterie, der in der untersten Schicht der inneren Kruste stattfindet, ist dabei von besonderem Interesse, da hier die Kerne in höchst exotischen Formen vorliegen [RPW83, PR95]. Auch schon im Vakuum und in der äußeren Kruste findet man Abweichungen von sphärischen Kernformen, allerdings nur die bekannten geringfügigen axialen und triaxialen Deformationen, die zu einer stärkeren Bindung der Nukleonen führen. Mit ansteigender Dichte in der inneren Kruste wird der Raumanteil der Kerne gegenüber dem Neutronengas zunehmend größer, bis sich die Kerne bei $\rho \approx 1/3 \rho_0$ sogar zu berühren beginnen.

Unter solch extremen Bedingungen muss zur Bestimmung des Grundzustandes auch die Form der Kerne als thermodynamische Variable mit berücksichtigt werden. Die einfachsten vorstellbaren Geometrien neben der Kugel sind dabei parallele Stäbe/Zylinder oder Platten aus Kernmaterie eingebettet in dem Gas aus Neutronen. Bei diesen Geometrien spricht man auch von der Fleischball-, Spaghetti- und der Lasagne-Phase, zusammenfassend von den nuklearen Pastaphasen. Es kommt zu einem Wechselspiel aus Oberflächen-, repulsiver langreichweitiger Coulomb-, und attraktiver kurzreichweitiger nuklearer Wechselwirkung je nach Volumen-Verhältnis der Kernmaterie zum Neutronengas.

Abhängig von der Gewichtung der einzelnen Energiebeiträge findet man die Abfolge Kugeln \rightarrow Stäbe \rightarrow Platten, bis die Kernmaterie schließlich mehr Raum einnimmt als das Neutronengas und deren Rollen vertauschen. Aus den mit Neutronengas gefüllten plattenförmigen „Löchern“ in der Kernmaterie werden wieder Stäbe und dann Kugeln, die immer kleiner werden, bis bei $\rho \approx 1/2 \rho_0$ der äußere Neutronenstern-Kern erreicht wird, wo das Neutronengas schließlich ganz verschwindet und nur noch homogene Kernmaterie (Sauce) vorliegt. Im oberen Teil von Abb. 1.6 ist dieser Übergang illustriert. Den Zustand der mit Neutronengas gefüllten Löcher in Kernmaterie (die sich ebenfalls in einem Gitter anordnen) bezeichnet man dabei auch als die Schweizer-Käse-Phase. Bei einer anderen Wahl der Oberflächen-, Coulomb- oder Bulk-Energie ist es aber auch möglich, dass nur einzelne oder sogar gar keine dieser exotischen Phasen auftreten.

Der äußere Kern ($2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3 \leq \rho \leq \rho_{\text{Kern}}$)

Die noch in der inneren Kruste vorhandenen Kerne sind nun komplett in ihre Bestandteile aus Neutronen, einem geringen Anteil an Protonen und Elektronen aufgelöst und bilden als relativistische Fermiflüssigkeit die Materie des äußeren Kerns. In der Nähe nuklearer Grundzustandsdichte wird sowohl das Verhältnis von Neutronen zu Protonen, als auch die Zustandsgleichung durch die grundlegenden Eigenschaften von Kernmaterie, wie der nuklearen Kompressibilität K_0 , der Symmetrieenergie S_0 oder der mittleren Bindungsenergie pro Nukleon bei Sättigungsdichte $BE(\rho_0)$ festgelegt. Im Labor ist es allerdings nur möglich nahezu symmetrische Kernmaterie, d. h. Kernmaterie mit gleicher Anzahl an Neutronen und Protonen, zu untersuchen. Zur Beschreibung der vorliegenden fast reinen Neutronenmaterie ist daher auch für diesen Dichtebereich theoretische Extrapolation notwendig.

Die Elektronen sind zur Erhaltung der Ladungsneutralität erforderlich. Bei ausreichend hohem elektrochemischen Potential erscheinen zusätzlich die ebenfalls negativ geladenen Myonen, die dabei einen Teil der Elektronen ersetzen.

Die Neutronenflüssigkeit ist möglicherweise eine 3P_2 Supraflüssigkeit und die Protonen ein 1S_0 Supraleiter.

Der innere Kern ($\rho_{\text{Kern}} \leq \rho$)

Der innere Kern zeichnet sich dadurch aus, dass ab einer gewissen Dichte ρ_{Kern} , neben den im äußeren Kern vorhandenen, weitere exotische Teilchen auftauchen. Es ergeben sich verschiedene Szenarien, die in Abb. 1.8 dargestellt werden. Einen Neutronenstern ohne diesen inneren Kern, der also nur aus Protonen, Neutronen, Elektronen und evtl. Myonen besteht, bezeichnet man auch als „traditionellen Neutronenstern“.

Eines der Szenarien ist das Auftreten eines Bose-Einstein-Kondensats der leichtesten Mesonen, der Pionen und/oder der leichtesten mit der Ladung „Strangeness“ (Seltsamkeit) behafteten Teilchen, der Kaonen. Fast alle theoretischen Modelle sagen das Erscheinen von Hyperonen (Baryonen mit Strangeness), wie z. B. dem Λ - oder dem Ξ^- -Teilchen bei einer ungefähren Dichte $\rho \approx (2-3)\rho_0$ vorher, man spricht dann von einem „Hyperonen-Stern“. Zur Herleitung der experimentell nicht bestimmbar Zustandsgleichung dieses Dichtebereichs können nur theoretische Modelle verwendet werden. Zum einen sind dies nichtrelativistische Viel-Teilchen-Theorien [FP81, APR98, BBS00, VPR⁺00], zum anderen relativistische nukleare Feldtheorien [SW86, Gle85, SHSG02, SZ03].

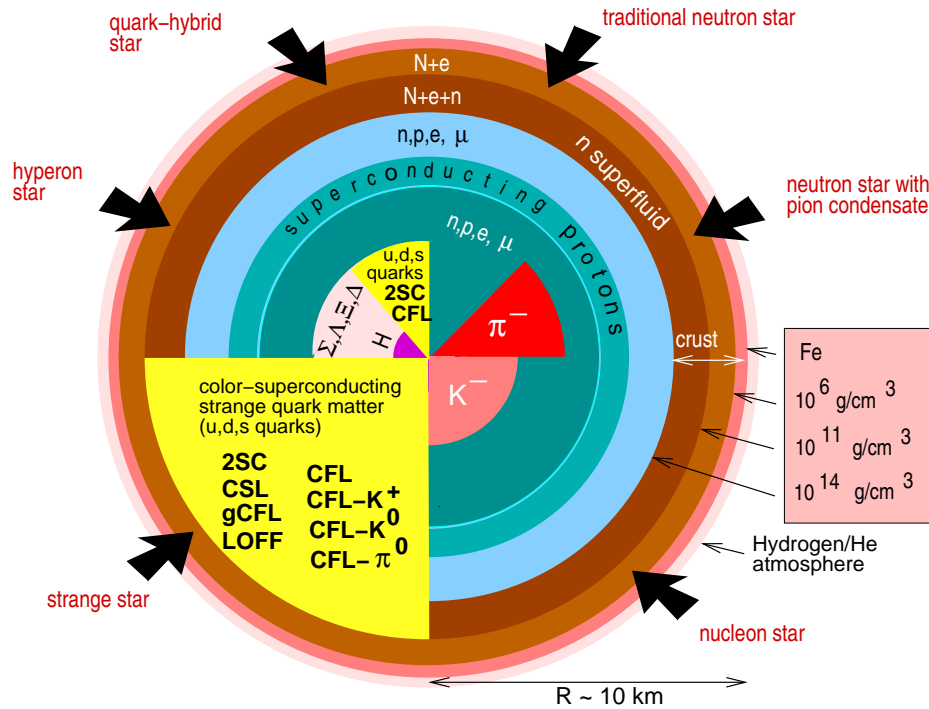


Abbildung 1.8: Mögliche Strukturen und neuartige Phasen superdichter Materie in Neutronensternen, deren Erscheinen aus den verschiedenen Theorien vorhergesagt werden. Grafik entnommen aus [Web05].

Quarkmaterie in Neutronensternen

Des Weiteren ist im innersten Bereich des Neutronensterns der Übergang zu freier Quarkmaterie, dem „Quark-Gluon-Plasma“ (QGP) möglich. Bei extrem hohen Dichten zersetzen sich die Protonen, Neutronen und eventuell vorhandene Hyperonen und Mesonen in ihre Bestandteile, den Quarks. Es bildet sich eine gemischte Phase hadronischer Materie und kleiner Tröpfchen aus Quarkmaterie. Solch einen Neutronenstern mit gemischter Phase bezeichnet man als „Quark-Hybrid-Stern“.

Der Phasenübergang zur Quarkmaterie führt auf die mögliche Existenz einer dritten Familie stabiler kompakter Sterne [GK00, SGST00, Sch05]. Mit Einsetzen des Phasenübergangs werden die entsprechenden Neutronensterne zunächst instabil. Erst wenn bei ausreichend hohen inneren Dichten der Phasenübergang komplett vollzogen ist, so dass ein Kern aus reiner Quarkmaterie vorliegt, findet man in der Masse-Radius-Beziehung einen neuen stabilen Abschnitt. Die Neutronensterne dieser dritten Familie besitzen ähnliche Massen wie traditionelle Neutronensterne, haben aber bei kleinere Radien. Die Erzeugung der dritten Familie ist nicht spezifisch für den QCD-Phasenübergang, sondern könnte durch jeden starken Phasenübergang erster Ordnung für Materie im β -Gleichgewicht erreicht werden.

Die Untersuchung der Phasenstruktur dichter, kalter Quarkmaterie hat die mögliche Existenz neuer Zustände des QGPs hervorgebracht, die verschiedenen Arten der Farb-Supraleitung [Alf01, Ris04, RWB⁺06, BS02]. Ähnlich wie Elektronen in supraleitenden Metallen können sich die Quarks eines kalten QGPs zu so genannten „Cooper-Paaren“ formieren, die bosonischen Charakter haben und ein Bose-Kondensat bilden. Im Gegensatz zu den Elektronen herrscht zwischen den Quarks eine attraktive, über Gluonen vermittelte Wechselwirkung. Bei den Elektronen sind es hingegen erst die Phononen des Gitters, welche die Bildung der Cooper-Paare verursachen.

Das QGP in einem Neutronenstern besteht neben den leichten „up“- und „down“-Quarks, aus denen sich z. B. die Nukleonen zusammensetzen, auch aus den schweren „strange“-Quarks, welche die Quantenzahl Seltsamkeit tragen. Da Quarks Fermionen sind, hat jedes Quark neben der Farbladung noch die Projektion des Spins als weiteren Freiheitsgrad. Es ergibt sich eine Vielzahl von Paarungsmöglichkeiten, von denen hier nur die zwei wichtigsten Formen der Farbsupraleitung beschrieben werden sollen.

Bei mittleren Dichten, bei denen das QGP bereits erreicht ist, die Masse des strange-Quarks aber noch berücksichtigt werden muss, liegt die so genannte „2SC-Phase“ vor. Hier bilden nur die up- und down-Quarks miteinander Cooper-Paare. Bei größeren Dichten kann auch das strange-Quark als masselos betrachtet werden, und man findet die so genannte „CFL-Phase“. Nun können alle drei Quarkflavors miteinander zu Paaren koppeln.

Das Phänomen der Farbsupraleitung verändert unter anderem die Zustandsgleichung und beeinflusst maßgeblich das Kühlverhalten des Quarkkerns.

1.2.1 Seltsame Neutronensterne

Ein anderes Szenario sind die in Abschnitt 1 bereits erwähnten seltsamen Sterne oder Quarksterne. Diese Sterne bestehen bis auf die äußere Kruste komplett aus seltsamer Quarkmaterie, also aus Quarkmaterie, die neben up- und down-Quarks auch strange-Quarks beinhaltet. Es wird davon ausgegangen (siehe z. B. [Web05]), dass sich dem Kern aus Quarkmaterie, nur durch ein elektrisches Feld separiert, die gewöhnliche äußere Kruste anschließt. In [JRS06] konnte aber gezeigt werden, dass seltsame Sterne auch eine eigene Form der äußeren Kruste besitzen könnten, bei der die Kerne durch kleine Tröpfchen seltsamer Quarkmaterie, so genannten „Strangelets“, ersetzt werden würden.

Die Existenz seltsamer Sterne ist mit der so genannten „Strange Matter Hypothesis“ von Bodmer [Bod71] und Witten [Wit84] verknüpft, die besagt, dass seltsame Quarkmaterie sogar stabiler als Kernmaterie oder Eisen ist, und somit für

verschwindenden Druck den absoluten Grundzustand aller Materie im Universum darstellt. Solche Sterne sind nicht allein durch die Gravitation, sondern auch durch die starke Wechselwirkung gebunden und werden daher auch als „selbstgebundene“ Sterne bezeichnet. Diese andere Form der Bindung führt zu einer eigenen Masse-Radius-Beziehung, die sich von der gewöhnlicher Neutronensterne unterscheidet. Unter Vernachlässigung der äußeren Kruste beginnt die Masse-Radius-Beziehung seltsamer Neutronensterne im Ursprung, d. h. es können beliebig kleine Radien und Massen erreicht werden. Für selbstgebundene Sterne existiert somit keine minimale Masse, wie dies für gewöhnliche Neutronensterne, die nur durch ihre eigene Gravitation gebunden sind, der Fall ist.

Seltsame Sterne haben kleinere Radien als gewöhnliche Neutronensterne, sind somit kompakter und können Rotationsperioden kleiner als 1 ms besitzen. Ansonsten existieren für die Beobachtung seltsamer Sterne keine charakteristischen Merkmale, die eine Differenzierung zwischen seltsamen und gewöhnlichen Neutronensternen erlauben. Bis heute ist weder auszuschließen, dass alle Neutronensterne seltsame Sterne sind, noch dass es überhaupt einen einzigen seltsamen Stern gibt.

1.2.2 Akkretierende Neutronensterne

Ein Neutronenstern, der z. B. in einem binären System Materie von seinem stellaren Partner akkretiert, unterscheidet sich in mehrerlei Hinsicht von einem nicht akkretierenden Neutronenstern.

Bei der akkretierten Materie wird es sich größtenteils um eine Mischung aus Wasserstoff und Helium mit nur geringem Anteil schwererer Elemente handeln. Die mit $v \sim 0,6 c$ schnell einfallende Materie trifft auf den oberen Bereich der Atmosphäre und wird dort schlagartig abgebremst. In der Atmosphäre sinkt das akkretierte Material langsam weiter ins Innere, bis eine Dichte von 10^5 g/cm^3 erreicht wird, bei der das Wasserstoff- und Heliumbrennen einsetzt. Die Akkretion und folgende nukleare Fusion führt zur Aufheizung der äußeren Schichten auf typische Temperaturen von $(10^8 - 10^9) \text{ K}$. Die hohe Temperatur verhindert, dass in dem Bereich unterhalb der Atmosphäre, in dem eigentlich die äußere Kruste beginnen würde, die Kerne in einem Gitter fixiert werden können. Stattdessen sind die Kerne, wie die entarteten Elektronen, in einer gasförmigen Phase und bilden einen neuen Abschnitt des Neutronensterns, den so genannten „Ozean“ [BB98]. Die freiwerdende Energie der Fusionsprozesse wird dabei durch die Elektronen sehr effektiv weitergeleitet, so dass der Ozean nahezu isothermal ist. Ein akkretierender Neutronenstern verharret somit in einem ähnlichen Zustand wie der, in dem sich ein noch nicht abgekühlter, junger Neutronenstern (Stufe IV-V in Abb. 1.4) befindet. Die das Gitter bildende Coulomb-Energie wächst nach innen allerdings schneller als die thermische Energie, so dass bei Dichten von 10^9 g/cm^3 die Schmelztemperatur die Temperatur des Ozeans über-

steigt, und die Kerne in einem Gitter kristallisieren (vgl. Abschnitt 2.3.2). Hier endet der Ozean, ihm schließt sich nun die bereits beschriebene äußere Kruste an.

Über Wärmeleitung wird auch der Kern des Neutronensterns aufgeheizt, der die aufgenommene Wärme über Neutrino-Emission abgibt. Akkretierende Neutronensterne sind also in einem teilweise sehr komplexen thermischen Zustand aus Energieerzeugung, Wärmetransport und Kühlung. Bei ungleichmäßiger Akkretion kann es auch zu explosionsartigen Ausbrüchen kommen, wenn z. B. lokal kurzzeitig die Zündungstemperatur des Kohlenstoffs überschritten wird, der in der ausgebrannten Asche der akkretierten Materie reichlich vorhanden ist. Neutronensterne mit ungleichmäßiger Akkretion und instabiler Fusion sind im Röntgenbereich oft als „X-Ray Burster“ beobachtbar. Mit Hilfe der Röntgenteleskope wie XMM-Newton, Chandra oder dem geplanten XEUS-Satelliten ist eine detaillierte spektroskopische Analyse solcher Bursts möglich, durch die auch Rückschlüsse auf die Zusammensetzung der äußeren Schichten und eventuell sogar auf die Masse oder den Radius des Neutronensterns gezogen werden können. So gelang es z. B. Cottam, Paerels und Mendez [CPM02] rotverschobene Spektrallinien hoch ionisierter Elemente für das „low mass X-ray binary“ (binäres System geringer Masse mit Emission im Röntgenbereich) EXO 0748-676 nachzuweisen. Die Messung der gravitativen Rotverschiebung z erlaubt direkt das Verhältnis von Masse und Radius des Neutronensterns zu ermitteln:

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}} - 1, \quad (1.14)$$

und stellt daher eine bedeutende Eigenschaft des Neutronensterns dar.

1.3 Motivation dieser Arbeit

Die Zustandsgleichung und Zusammensetzung der äußeren Kruste wurde ursprünglich von Baym, Pethick und Sutherland (BPS) bestimmt [BPS71]. Das BPS-Modell, das im Kapitel 2 ausführlich vorgestellt wird, ist gültig für verschwindende Temperatur ($T = 0$), was eine gute Näherung für nicht akkretierende kalte Neutronensterne darstellt. An dieser klassischen Veröffentlichung orientieren sich auch die Berechnungen dieser Arbeit, unter Verwendung zusätzlicher theoretischer Erweiterungen und der neuesten Daten aus der experimentellen und theoretischen Kernphysik. Die später vorgestellten Ergebnisse basieren dabei direkt auf den einerseits im Experiment ermittelten und andererseits in der Theorie vorhergesagten Massen neutronenreicher Kerne. BPS bestimmten die Zustandsgleichung und die Sequenz der Kerne, die in der äußeren Kruste auftauchen, mit der nuklearen Massentabelle des Tröpfchenmodells von Myers und Swiatecki [MS66], entstanden in der Mitte der 60er Jahre.

1989 folgte die Veröffentlichung [HZD89] von Haensel, Zdunik und Dobaczewski (HZD). Zur Aktualisierung der Ergebnisse von BPS verwendeten sie zwei verschiedene Kernmodelle, zum einen eine Skyrme-Hartree-Fock-Bogolyubov-Rechnung in sphärischer Näherung für den Parametersatz SkP [DFT84] und zum anderen ein neueres Tröpfchenmodell von Myers [Mye77].

Haensel und Pichon (HP) nutzten 1994 in [HP94] mit der atomaren Massentabelle von Audi und Wapstra [AW93] neben den theoretischen Modellen erstmals verstärkt experimentelle Daten zur Bestimmung der Sequenz der Kerne in der äußeren Kruste. Für Kerne mit unbekannter Masse betrachteten sie das Tröpfchenmodell von Möller und Nix [MN88] und die theoretische Massenformel von Aboussir et al. [APDT92].

Eine Zusammenfassung und Rückblick auf bisherige Arbeiten zur inneren und äußeren Kruste akkretierender und nicht akkretierender Neutronensterne kann in [Hae01] gefunden werden.

In dieser Arbeit soll unter Verwendung der aktuellsten und modernsten experimentellen und theoretischen Kerndaten die Ergebnisse von BPS, HZD und HP auf den gegenwärtigen Stand der Forschung gebracht, und die Eigenschaften der äußeren Kruste nicht akkretierender kalter Neutronensterne neu untersucht werden. Hierbei sind die beiden wesentlichen Aspekte zum einen die Sequenz der in der Kruste auftretenden Kerne und zum anderen die daraus resultierende Zustandsgleichung. Aus der Zustandsgleichung kann wiederum die Masse-Radius-Beziehung der Kruste bestimmt werden, welche die grundlegendste beobachtbare Eigenschaft eines Neutronensterns darstellt.

Es zeigt sich, dass in dieser speziellen, hochdichten Umgebung viele solcher Kerne auftreten, die unter normalen Bedingungen äußerst kurzlebig und nur schwer zu erzeugen sind. In der Nuklidkarte in Abb. 1.9 ist eine, wie sich zeigen wird, typische Sequenz an Kernen, die in der äußeren Kruste auftreten, eingezeichnet. Farblich wird in der Nuklidkarte zwischen stabilen, bereits gemessenen instabilen, und instabilen Kernen unterschieden, für welche die Massenbestimmung mit dem Zukunftsprojekt „Facility for Antiproton and Ion Research“ (FAIR)⁵ an der Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI) in Darmstadt möglich wird.

Die experimentelle Massenbestimmung deckt bisher nur einen kleinen Teil aller eventuell auftretenden Nuklide ab, und so muss zusätzlich auf theoretische Modelle der Kernstrukturphysik für die Massenbestimmung zurückgegriffen werden. Hierfür wird eine Vielzahl an, auf unterschiedlichen Theorien basierenden, Kernmodellen verwendet, um die Unterschiede dieser Modelle zu studieren und miteinander vergleichen zu können. Es sollen die Auswirkungen der unterschiedlichen Vorhersagen für die Massen der Kerne auf die Eigenschaften der äußeren Kruste analysiert werden.

⁵<http://www.gsi.de/fair>

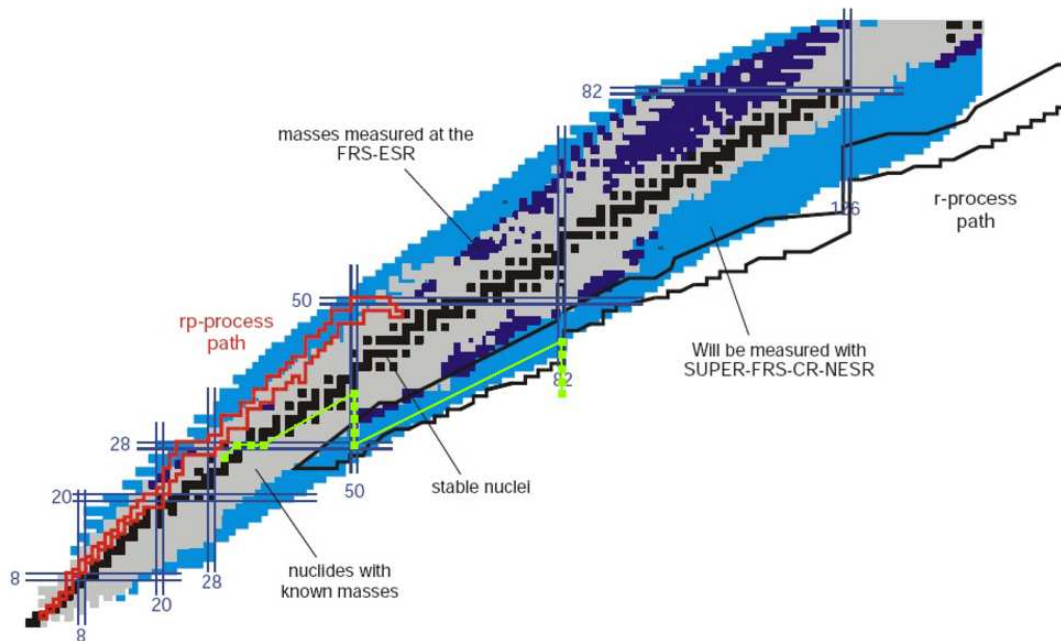


Abbildung 1.9: Karte der Nuklide mit Protonenzahl Z in Abhängigkeit von der Neutronenzahl N . Schwarze Quadrate: Absolut stabile Kerne; grau: instabile Kerne mit bekannter Masse; dunkelblau: gegenwärtige Messungen am FRS-ESR der GSI, hellblau: zukünftige Messungen nach der Fertigstellung von FAIR; hellgrün: beispielhafte Sequenz der Kerne in der äußeren Kruste nicht akkretierender kalter Neutronensterne. Rot bzw. schwarz umrandete Gebiete zeigen Kerne, die im rp- bzw. p-Prozess auftauchen, blaue Linien markieren die bekannten magischen Zahlen, die Schalenabschlüsse darstellen.

Die 20 verschiedenen untersuchten theoretischen Kernmodelle und experimentellen Daten werden in Kapitel 3 ausführlich vorgestellt und beschrieben.

Es ist das erste Mal, dass solch eine große Anzahl an Kernmodellen hinsichtlich der „Neutronen-Dripline“⁶, magischer Zahlen, der Zustandsgleichung, der Zusammensetzung und der Masse-Radius-Beziehung der äußeren Kruste im Detail miteinander verglichen werden. Außerdem finden das erste Mal relativistische Kernmodelle zur Untersuchung der äußeren Kruste Verwendung. Des Weiteren werden Auswirkungen des Pairings, der Deformationen von Kernen und der den Kernmodellen zugrunde liegenden Theorien im Detail betrachtet. Diese direkte Studie der theore-

⁶Als Neutronen-Dripline bezeichnet man die Grenze in der Nuklidkarte, hinter der Kerne instabil gegenüber der Emission von Neutronen werden, die exakte Definition ist in Unterabschnitt 4.0.5 gegeben. In Unterabschnitt 4.0.5 wird gezeigt, dass der Grundzustandskern beim Erreichen des Neutron-Drips immer ein Kern der Neutronen-Dripline ist.

tischen Kernmodelle anhand der Anwendung auf die äußere Kruste stellt eine der zentralen Aufgaben dieser Arbeit dar.

Wie in Abb. 1.9 erkennbar, beginnen Forschungseinrichtungen wie FAIR an der GSI, TRIUMFs „Isotope Separator and Accelerator“ (ISAC-II)⁷ und das „Rare Isotope Accelerator“ (RIA)⁸ Projekt mit der experimentellen Massenbestimmung in den für die äußere Kruste besonders wichtigen Bereich höchst kurzlebiger, neutronenreicher Kerne vorzudringen. Es ist zu erwarten, dass durch die zukünftige Messung bisher unbekannter Nuklide die tatsächliche Sequenz der Kerne allein aus dem Experiment abschließend bestimmt werden wird. Die hier vorgestellten Ergebnisse sind in dieser Hinsicht auch ein Test der Vorhersagekraft der theoretischen Modelle.

Die Zusammensetzung der äußeren Kruste beeinflusst einige der Beobachtungsgrößen eines Neutronensterns und spielt bei der Abkühlung und Evolution vom Proto-Neutronenstern zum kalten Neutronenstern eine wichtige Rolle. Die von der Zusammensetzung abhängigen Phänomene wurden bereits in Unterabschnitt 1.2 vorgestellt.

Die Zustandsgleichung der äußeren Kruste ist besonders für Neutronensterne mit geringer Masse von Bedeutung. Nach Erweiterung des BPS-Modells auf endliche Temperaturen wäre die Zustandsgleichung geringer Dichte auch ein wichtiger Bestandteil der Beschreibung von Neutronenstern-Kollisionen und Kernkollaps-Supernovae.

⁷<http://www.triumf.info>

⁸<http://www.orau.org/ria>

Kapitel 2

Das BPS-Modell

In diesem Kapitel wird zunächst das Modell zur Beschreibung der äußeren Kruste von nicht akkretierenden kalten Neutronensternen von G. Baym, C. Pethik und P. Sutherland aus dem Jahre 1971 [BPS71] vorgestellt. Anschließend wird das verwendete Verfahren zur Bestimmung des Grundzustands und die Eigenschaften der Übergangspunkte zwischen verschiedenen Grundzustandskernen erläutert. In den letzten beiden Abschnitten werden die Korrekturen des Modells höherer Ordnung eingeführt und die Stabilität des Gitters diskutiert.

2.1 Das ursprüngliche BPS-Modell

Die Materie sei aus Kernen mit Massenzahl A und Ladungszahl Z zusammengesetzt. Ist n_N die Anzahl der Kerne pro Volumeneinheit, dann ergibt sich die totale Energiedichte des Systems zu:

$$\epsilon_{tot}(A, Z, n_N) = n_N(W_N + W_L) + \epsilon_e , \quad (2.1)$$

wobei W_N die totale Masse eines isolierten Kerns, W_L die Gitterenergie pro Kern und ϵ_e die Energiedichte der Elektronen ist.

2.1.1 Die Energiedichte der freien Elektronen

Mit der Energie eines einzelnen Elektrons, die gemäß der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung aus der Elektronenmasse m_e und dem Impuls k bestimmt wird,

$$E(k) = \sqrt{k^2 c^2 + m_e^2 c^4} , \quad (2.2)$$

lässt sich ϵ_e als freies Elektronengas in Abhängigkeit vom Fermi-Impuls der Elektronen k_e berechnen:

$$\begin{aligned}\epsilon_e(k_e) &= \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_e} E(k) k^2 dk \\ &= \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_e} (k^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{1/2} k^2 dk \\ &= \frac{m_e^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} \left[(2x^3 + x)(1 + x^2)^{1/2} - \operatorname{arcsinh}(x) \right] ,\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$(2.4)$$

mit dem Relativitätsparameter

$$x = k_e / m_e c \tag{2.5}$$

und dem Planckschen Wirkungsquantum \hbar . Der Fermi-Impuls bestimmt auch die Dichte der Elektronen n_e :

$$n_e = \frac{k_e^3}{3\pi^2 \hbar^3} . \tag{2.6}$$

Sterne sind durch die Gravitation gebunden und müssen, um stabil zu sein, und nicht aufgrund der langreichweitigen, repulsiven Coulomb-Kräfte zu explodieren, globale Ladungsneutralität erfüllen. In dieser Rechnung wird auch lokale Ladungsneutralität angenommen:

$$n_e = Z n_N , \tag{2.7}$$

so dass ϵ_e mit Hilfe der Glg. (2.3)-(2.7) letzten Endes als Funktion von Z und n_N ausgedrückt werden kann: $\epsilon_e = \epsilon_e(Z, n_N)$.

2.1.2 Die Kernmasse

Die Masse eines Kerns erhält man aus:

$$W_N = m_n N + m_p Z - bA , \tag{2.8}$$

wobei $N = A - Z$ die Neutronenzahl und $b = B(A, Z)/A$ die nukleare Bindungsenergie B pro Nukleon des vollständig ionisierten Kerns ist. Die Bindungsenergie ist die einzige nicht bestimmbar, unbekannte Größe im BPS-Modell, die für die Berechnung benötigt wird. Hier wird entweder auf experimentelle Daten oder theoretische Modelle zurückgegriffen, welche im Kapitel 3 im Detail vorgestellt und erläutert werden. Von den Kernmodellen wird für die Massenzahl A und Ladung Z die korrespondierende Bindungsenergie pro Nukleon $b(A, Z)$ benötigt.

2.1.3 Die Gitterenergie

Die Gitterenergie beschreibt die Coulomb-Wechselwirkung der Elektronen und Kerne. Für gegebene Dichte der Kerne mit Ladung Z stellt ein kubisch-raumzentriertes Bravais-Gitter (bcc-Gitter) die energetisch günstigste Gitterform dar. Um die Gitterenergie zu berechnen, unterteilt man den bcc-Kristall zweckmäßigerweise in so genannte „Wigner-Seitz-Zellen“ nach dem Verfahren von Eugene Paul Wigner und Frederick Seitz [WS33, WS34]. Die Wigner-Seitz-Zelle ist eine spezielle Elementarzelle eines Kristallgitters, die nur einen Gitterpunkt in ihrem Zentrum enthält. Für diesen Gitterpunkt werden die Verbindungsstrecken zu den Nachbarpunkten durch Normalebenen halbiert. Der durch diese Normalebenen begrenzte dreidimensionale Körper ist die Wigner-Seitz-Zelle, seine Oberfläche besteht für das bcc-Gitter aus Sechsecken und Quadraten, wie in Abb. 2.1 zu erkennen ist.

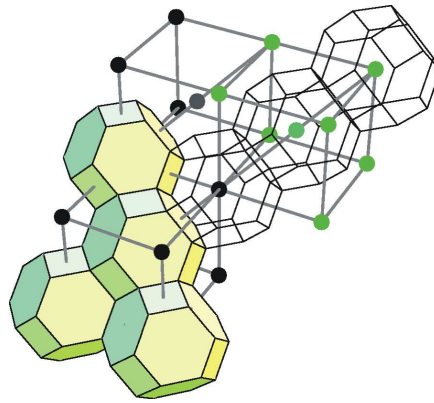


Abbildung 2.1: Wigner-Seitz-Zellen des bcc-Gitters.

In der Wigner-Seitz-Näherung wird jede Zelle als Sphäre mit Radius R , der ungefähr der halben Gitterkonstanten a entspricht, die mit Glg. (1.10) durch die Dichte der Kerne gegeben ist:

$$a = \left(\frac{2}{n_N} \right)^{1/3} = \left(\frac{8\pi}{3} R^3 \right)^{1/3} \approx 2 R. \quad (2.9)$$

Die Wigner-Seitz-Zelle ist per Konstruktion elektrisch neutral. Vernachlässigt man Wechselwirkungen zwischen den Wigner-Seitz-Zellen, so ist die Gitterenergie pro Kern gerade die Coulomb-Energie einer Wigner-Seitz-Zelle, die sich aus dem elektrischen Feld

$$E(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right) \quad (2.10)$$

berechnen lässt:

$$\begin{aligned} W_L &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV \\ &\approx -\frac{9}{5} \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 a} . \end{aligned} \quad (2.11)$$

In einer detaillierten numerischen Rechnung erhalten Coldwell-Horsfall und Maradudin [CHM60] folgenden speziellen Vorfaktor:

$$W_L = -1,81962 \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 a} . \quad (2.12)$$

Mit Hilfe der Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} , \quad (2.13)$$

sei hier die Gitterenergie noch einmal in „natürlichen“¹ Einheiten angegeben:

$$W_L \simeq -0,46684 Z^{5/3} \alpha m_e x . \quad (2.14)$$

Vergleicht man die zur Gitterenergie gehörende Energiedichte $\epsilon_L = n_N W_L$ mit der Energiedichte der Elektronen ϵ_e (Glg. (2.3)), so findet man mit Glg. (2.7):

$$\frac{\epsilon_L}{\epsilon_e} \simeq -0,46684 Z^{2/3} \alpha \frac{n_e}{\epsilon_e} m_e x \quad (2.15)$$

$$\sim \begin{cases} -0,47 Z^{2/3} \alpha x \ll 1, & \text{für } x \ll 1 \\ -0,62 Z^{2/3} \alpha \ll 1, & \text{für } x \gg 1 \end{cases} . \quad (2.16)$$

Die Gitterenergie stellt also nur eine kleine Korrektur zur Gesamtenergiedichte dar.

2.1.4 Druck des Systems

Für die weitere Rechnung muss auch der Druck des Systems bestimmt werden. Mit Hilfe der thermodynamischen Beziehung:

$$P = n_b^2 \left. \frac{\partial(\epsilon_{tot}/n_b)}{\partial n_b} \right|_{Z,A} , \quad (2.17)$$

¹In einem System natürlicher Einheiten werden die jeweiligen grundlegenden Naturkonstanten gleich eins und dimensionslos gewählt. In der Hochenergiephysik werden Lichtgeschwindigkeit und Plancksches Wirkungsquantum gleich eins gesetzt, so dass alle Einheiten als Potenzen der Einheit der Energie (eV) ausgedrückt werden können.

in der die Baryondichte

$$n_b = A n_N \quad (2.18)$$

Verwendung findet, ergibt sich aus Glg. (2.1):

$$P = P_e + \frac{1}{3} W_L n_N . \quad (2.19)$$

Der Druck des Systems wird also nur durch die Elektronen und den negativen Druckbeitrag des Gitters generiert, die Kerne erzeugen keinen Druck, da diese fest an den Gitterpunkten sitzen.

Der Druck der Elektronen P_e kann über folgenden thermodynamischen Zusammenhang einfach bestimmt werden:

$$P_e = \mu_e n_e - \epsilon_e , \quad (2.20)$$

und ist somit nur von n_e abhängig: $P_e = P_e(n_e)$. Hierbei bezeichnet μ_e das elektrochemische Potential, also die Energie, die benötigt wird, um dem System ein Elektron hinzuzufügen. Für ein entartetes Fermigas entspricht μ_e der Energie des Elektrons im höchsten besetzten Zustand, dessen Impuls gerade der Fermi-Impuls ist:

$$\mu_e = E(k_e) = \sqrt{k_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} , \quad (2.21)$$

da alle tieferliegenden Energieniveaus aufgefüllt sind.

2.1.5 Bestimmung des Grundzustandes

Analog zu Glg. (2.16) stellt der negative Druckbeitrag, der von der Gitterenergie her stammt, nur eine kleine Korrektur zum Gesamtdruck dar. In erster Näherung ist der Druck des Systems also durch den Druck der freien Elektronen gegeben. Der Druck in einem Stern ist wiederum eine monoton wachsende Größe mit dem Abstand zur Oberfläche, so dass die Dichte der Elektronen beim Übergang von einer Sorte Kerne zur nächsten, $(A, Z) \rightarrow (A', Z')$, in erster Näherung ebenfalls kontinuierlich verlaufen muss. Dies hat wiederum zur Folge, dass es bei den Übergängen zu Unstetigkeiten in der Baryonen- und der Massendichte

$$\rho = \epsilon_{tot}/c^2 \quad (2.22)$$

kommt:

$$n'_b - n_b \simeq n_e \left(\frac{A'}{Z'} - \frac{A}{Z} \right) , \quad (2.23)$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \simeq \frac{\Delta n_b}{n_b} \simeq \frac{Z/A}{Z'/A'} - 1 . \quad (2.24)$$

Aufgrund dieser Dichtesprünge müsste, um den Phasenübergang korrekt zu beschreiben, eine Maxwell-Konstruktion für $P(n_b)$ durchgeführt werden.

Exakter wäre die Beschreibung durch eine Gibbs-Konstruktion, bei der die strenge Forderung lokaler Ladungsneutralität aufgehoben wird (siehe z. B. [Gle00]). Stattdessen beschränkt man sich auf globale Ladungsneutralität, die zum Auftreten einer gemischten Phase und einem kontinuierlich ablaufenden Phasenübergang in μ_b und μ_e führt. Dies hätte ein gemischtes Gitter im Übergangsbereich zur Folge, das mit dem hier vorgestellten BPS-Modell nicht mehr beschrieben werden kann, weshalb die einfachere Bedingung lokaler Ladungsneutralität beibehalten wird. Auf mögliche gemischte Phasen wird in Abschnitt 2.2.1 näher eingegangen.

Eine einfache Methode, welche die Maxwell-Konstruktion beinhaltet, ergibt sich, wenn anstatt der Baryonendichte n_b der Druck P als unabhängige Variable behandelt wird. In diesem Fall ist die freie Enthalpie (Gibbsches Potential) $G(T, p, N_b)$ das geeignete thermodynamische Potential. Im Gleichgewicht gilt $dG = 0$, G ist minimal. Mit der Gibbs-Duhem-Relation

$$G = \mu_b N_b \quad (2.25)$$

für das baryochemische Potential μ_b , folgt bei festgehaltener Baryonenzahl N_b :

$$d\mu_b = 0, \quad (2.26)$$

μ_b wird minimal. Das baryochemische Potential kann aus Glg. (2.1) und (2.19) mit Hilfe des folgenden thermodynamischen Zusammenhangs bestimmt werden:

$$\mu_b = \frac{\epsilon_{\text{tot}} + P}{n_b} \quad (2.27)$$

$$\Rightarrow \mu_b = \frac{W_N + \frac{4}{3}W_L + Z\mu_e}{A}. \quad (2.28)$$

Um bei gegebenen Druck den Grundzustand zu finden, wird zunächst über eine Nullstellensuche bei festgehaltenem A und Z aus Glg. (2.19) μ_e bestimmt, das wiederum die restlichen Größen des Systems wie ρ , n_b und auch μ_b festlegt. Dies wird für alle verfügbaren Kerne eines Kernmodells durchgeführt, um so das baryochemische Potential hinsichtlich der Massenzahl A und Ladung Z zu minimieren.

Für jedes Modell beginnt die Rechnung bei einem Druck von $P = 9,744 \cdot 10^{18}$ dyne/cm², was einer Dichte von $\rho \simeq 1,044 \cdot 10^4$ g/cm³ entspricht. Diese speziellen Werte sind die gleichen Anfangswerte wie in Ref. [BPS71]. Des Weiteren ist bei dieser Dichte die in Abschnitt 1.2 hergeleitete Bedingung vollständiger Ionisation des Eisens erfüllt (siehe Glg. (1.13)), was den Beginn der äußeren Kruste markiert.

Der Druck, und damit auch die Dichte, wird kontinuierlich erhöht und jedes Mal der zugehörige Grundzustandskern ermittelt, bis der Neutronen-Drip erreicht ist.

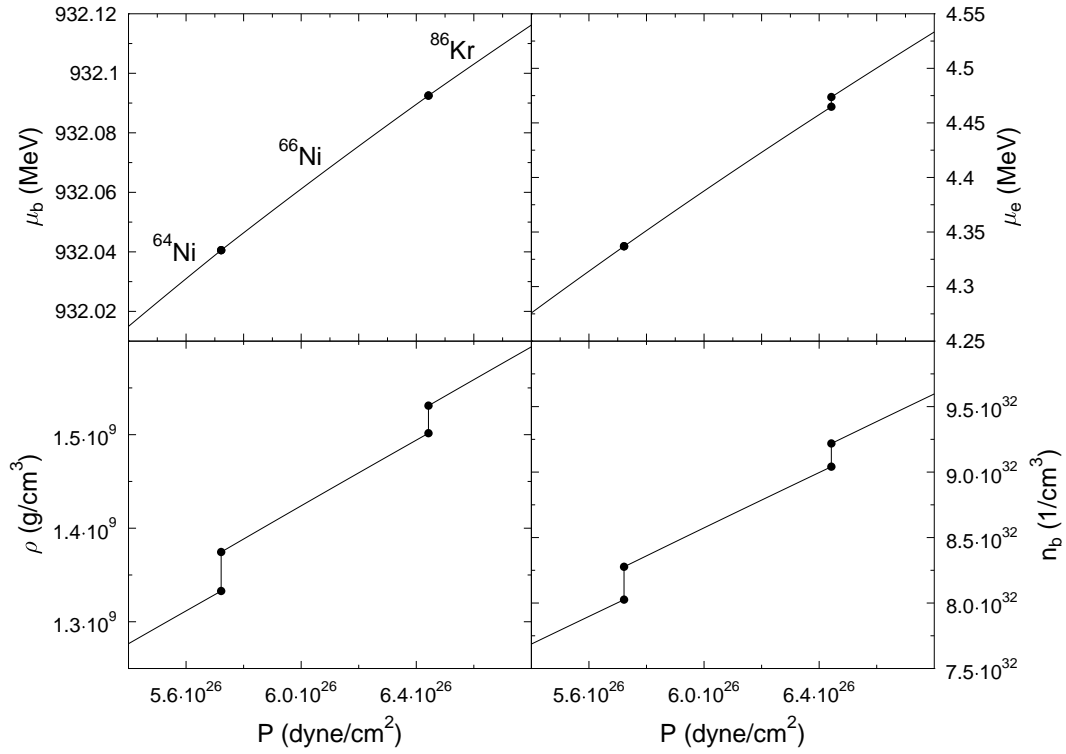


Abbildung 2.2: Diverse Zustandsgrößen berechnet für das Kernmodell FRDM im Bereich der Übergänge von ^{64}Ni zu ^{66}Ni und von ^{66}Ni zu ^{86}Kr , die durch Punkte gekennzeichnet sind. Der Druck P und das baryochemische Potential μ_b verlaufen über die Übergänge hinweg stetig; μ_e hingegen nur bei gleichbleibendem Element Z . ρ und n_b sind bei jedem Übergangspunkt unstetig.

Dies geschieht, abhängig vom verwendeten Modell, bei einer Dichte von $\rho \approx 4,3 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$ und kennzeichnet das Ende der äußeren Kruste.

Das erste freie Neutron erscheint, wenn der Fermi-Impuls der Neutronen k_n einen nicht verschwindenden Wert annimmt. Vernachlässigt man die vorhandene, aber schwache Wechselwirkung der Neutronen mit den Kernen, und betrachtet die Neutronen als freies Gas, so geschieht dies genau dann, wenn gilt:

$$\mu_b = m_n, \quad (2.29)$$

da Neutronen nur die Ladung Baryonenzahl tragen. Wenn die attraktive Wechselwirkung des Neutronengases mit den Kernen stärker wäre als die repulsive Wechselwirkung der freien Neutronen untereinander, so würde der Neutronen-Drip tatsächlich geringfügig früher erreicht werden. Da dies in den vorliegenden Berechnungen allerdings nicht berücksichtigt werden kann, wird im Folgenden der Begriff des Neutronen-Drips gemäß Glg. (2.29) verwendet.

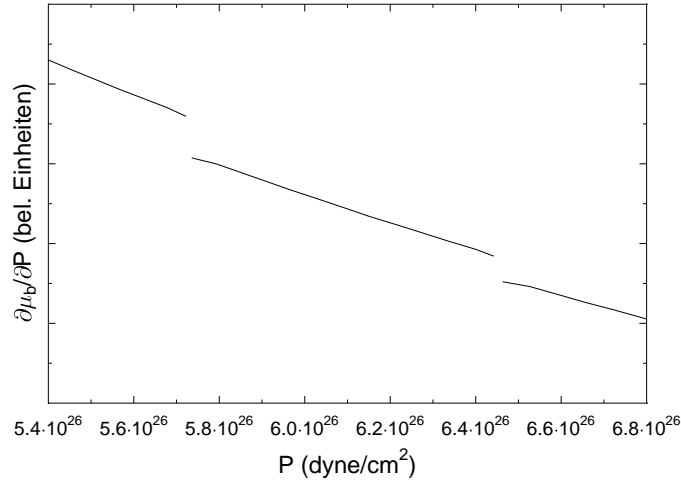


Abbildung 2.3: $\partial\mu_b/\partial P$ für das Kernmodell FRDM im Bereich der Übergänge von ^{64}Ni zu ^{66}Ni und von ^{66}Ni zu ^{86}Kr . Die Unstetigkeiten, die Phasenübergänge erster Ordnung signalisieren, sind deutlich zu erkennen.

Das hier dargestellte Verfahren wird für eine Vielzahl unterschiedlicher theoretischer Kernmodelle, die in Kapitel 3 beschrieben werden, jeweils aufs Neue über den gesamten Dichtebereich durchgeführt.

Um den Übergangspunkt eines Grundzustandskerns zu einem anderen präzise zu bestimmen, ist weiterer numerischer Rechenaufwand notwendig. Die Minimierung muss innerhalb eines Such-Algorithmus' für jeden Druck in der Umgebung des Übergangspunktes erneut durchgeführt werden, bis dieser mit der erwünschten Genauigkeit bestimmt wurde.

Bei der verwendeten Methode sind der Druck P und das chemische Potential μ_b bei den Übergängen von einer Sorte Kerne zur nächsten stetig. Da der Druck P nur eine Funktion von Z und μ_e ist, gilt, dass μ_e , und damit auch n_e , stetig verläuft, wenn sich die Ladungszahl Z beim Übergang nicht ändert, ansonsten kommt es auch hier, wie für ρ und n_b , zu Unstetigkeiten. Abb. 2.2 zeigt für das Kernmodell FRDM (siehe Kapitel 3.1) die Übergänge von ^{64}Ni zu ^{66}Ni und von ^{66}Ni zu ^{86}Kr , an denen das beschriebene Verhalten gut erkennbar ist.

Nach Nolting [Nol05] ist ein Phasenübergang erster Ordnung dadurch gekennzeichnet, dass die ersten Ableitungen der freien Enthalpie $G(T, P)$ beim Übergang unstetig sind. Mit Glg. (2.25) folgt:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T = N_b \left(\frac{\partial \mu_b}{\partial P}\right)_T \quad (2.30)$$

In Abb. 2.3 ist die charakteristische Größe $\partial\mu_b/\partial P$ für das Kernmodell FRDM erneut im Bereich der Übergänge von ^{64}Ni zu ^{66}Ni und ^{86}Kr dargestellt. Aufgrund

der erkennbaren Unstetigkeit handelt es sich also bei dem Übergang von einem Grundzustandskern zum nächsten um einen Phasenübergang erster Ordnung, wobei sich nun natürlich die Frage nach einer möglichen gemischten Phase stellt.

2.2 Erweiterung des BPS-Modells

2.2.1 Mögliche gemischte Phasen

C. J. Jog und R. A. Smith betrachteten in ihrer Arbeit „Mixed lattice phases in cold dense matter“ [JS82] eine gemischte Phase aus zwei sich gegenseitig durchdringenden kubischen Gittern verschiedener Kerne (A, Z) und (A', Z') . Sie zogen dabei vier verschiedene Gittertypen in Erwägung: Kubisch-flächenzentriertes Gitter (fcc) mit (A, Z) auf den Flächenmitten und (A', Z') an den Ecken, kubisch-raumzentriertes Gitter (bcc) mit (A, Z) an den Ecken und (A', Z') in der Mitte, hexagonal-dichteste Kugelpackung (hcp) mit abwechselnden Schichten (A, Z) und (A', Z') , und kubisch-primitives Gitter (sc) mit jedem (A, Z) umgeben von (A', Z') . Für die Berechnung verwendeten sie die Kerne, die Baym Pethick und Sutherland [BPS71] in ihrer Arbeit von 1971 fanden. Da das (bcc)-Gitter gegenüber den anderen drei am stärksten gebunden ist, tritt ausschließlich das selbige als stabile gemischte Phase auf. Beinahe zwischen jeden Kernsorten wird das gemischte Gitter bevorzugt, allerdings nur in einem sehr kleinen Bereich der Größenordnung $\Delta P = 10^{-4}P$ um den Druck P , bei dem der Übergang stattfindet. Dies korrespondiert zu einer räumlichen Dicke der Übergangsschicht von nur wenigen nm. Für die Zustandsgleichung und die Masse-Radius-Beziehung scheint das Hinzufügen der Mischphase also unerheblich zu sein, und rechtfertigt die weitere Rechnung mit den Phasenübergängen erster Ordnung ohne die gemischten Phasen.

Allerdings muss angemerkt werden, dass Jog und Smith ein sehr eingeschränktes Modell verwendeten, da das Verhältnis der Dichte der Kerne (A, Z) zur Dichte der Kerne (A', Z') über den gesamten Phasenübergang durch die vorgegebenen Gittertypen fixiert war. Eine Relaxierung in dieser Hinsicht könnte zu einer wesentlich ausgedehnteren gemischten Phase führen, was bisher jedoch von niemandem genauer untersucht wurde.

2.2.2 Atomare Bindungsenergien

Für Glg. (2.8) werden nukleare Bindungsenergien komplett ionisierter Kerne benötigt. Hierfür wird unter anderem der Audi-Wapstra-Katalog von 2003 [AWT03] verwendet, bei dem es sich um eine umfassende Kompilation experimentell bestimmter Bindungsenergien handelt. Die tabulierten Bindungsenergien pro Nukleon beziehen

sich jedoch auf totale Massen $M(A, Z)$ neutraler Atome, die sowohl die Ruhemassen der Protonen, Neutronen und Elektronen als auch die nuklearen und atomaren Bindungsenergien beinhalten. Neben den Ruhemassen muss daher noch die atomare Bindungsenergie der Elektronen B_{el} subtrahiert werden. In [LPT03] wird hierfür folgende empirische Formel angegeben:

$$B_{el} = (14,4381Z^{2,39} + 1,55468 \cdot 10^{-6}Z^{5,35}) \text{ eV} . \quad (2.31)$$

B_{el} stellt nur eine kleine Korrektur dar, die oftmals sogar unter der Genauigkeit der experimentellen Massenbestimmung liegt. In [BPS71] wurde auf die Korrektur durch die atomare Bindungsenergie verzichtet, da diese außerdem von ungefähr gleicher Größenordnung, aber entgegengesetztem Vorzeichen wie die noch zu besprechende Screening-Energie (siehe Abschnitt 2.2.3) ist.

Der für diese Arbeit besonders interessante Bereich der Neutronen-Dripline ist experimentell größtenteils noch nicht zugänglich, so dass neben den Audi-Wapstra-Daten auf theoretische Kernmodelle zurückgegriffen wird. Da fast jedes theoretische Kernmodell an experimentell bestimmten Bindungsenergien angepasst wird, und dafür ebenfalls oft atomare Bindungsenergien Verwendung finden, müssten auch die theoretischen Modelle um B_{el} korrigiert werden. Bei den meisten theoretischen Modellen wird allerdings nicht zwischen atomaren und nuklearen Bindungsenergien unterschieden.

Aus diesem Grund wird für die folgenden Rechnungen diese Korrektur ausschließlich auf den Audi-Wapstra-Katalog angewandt, wo auch explizite Angaben zur verwendeten Form der Bindungsenergie gemacht werden:

$$b_{AW} = \frac{1}{A} (ZM(^1H) + Nm_n - M(A, Z)) . \quad (2.32)$$

Somit ist hier zwar für jedes Proton bereits die atomare Bindungsenergie des Wasserstoffatoms (die Rydbergenergie) herausgerechnet, allerdings nicht die gesamte Ionisationsenergie. Die gewünschte Form der Bindungsenergie ergibt sich nun zu:

$$b = b_{AW} + \frac{Z}{A} (m_p - M(^1H)) - \frac{1}{A} B_{el} . \quad (2.33)$$

2.2.3 Die Screening-Energie

Bereits im Jahre 1961 beschrieb E. E. Salpeter in seiner Arbeit „Energy and Pressure of a Zero-Temperature Plasma“ [Sal61] höhere Korrekturen zur Gitterenergie W_L . Aufgrund der damals sehr beschränkten Rechenkapazitäten mussten Baym, Pethick und Sutherland 1971 auf diese Erweiterungen verzichten. Heutzutage, nach 30 Jahren technologischem Fortschritt, stellt die Implementierung dieser Korrekturen kein Problem mehr dar.

Aufgrund von Abschirmungseffekten kommt es zu geringfügigen Abweichungen in der gleichförmigen Verteilung der Elektronen. Durch eine leicht erhöhte Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen in der Nähe der Ionen erhält man einen ebenfalls negativen Korrekturterm zur Gitterenergie, die so genannte Screening-Energie:

$$W_{Sc} = -\frac{162}{175} \left(\frac{4}{9\pi} \right)^{2/3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 Z^{7/3} \frac{\mu_e}{(\hbar c)^2} \quad (2.34)$$

$$\simeq -0,2513 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 Z^{7/3} \frac{\mu_e}{(\hbar c)^2} \quad (2.35)$$

Nach Glg. (2.17) erzeugt diese Energie auch einen Druck, den Screening-Druck:

$$P_{Sc} = \frac{1}{3} n_N W_{Sc} \frac{k_e c}{\mu_e} . \quad (2.36)$$

Unter Verwendung natürlicher Einheiten ergibt sich für die Screening-Energie:

$$W_{Sc} \simeq -0,25 \alpha^2 Z^{7/3} \mu_e . \quad (2.37)$$

Dies kann mit der atomaren Bindungsenergie B_{el} aus Glg. (2.31) verglichen werden, die ungefähr die gleiche Abhängigkeit von Z zeigt:

$$\frac{W_{Sc}}{B_{el}} \simeq 0,47 Z^{-0,06} \frac{\mu_e}{m_e c^2} . \quad (2.38)$$

Erst im relativistischen Grenzfall beginnt die Screening-Energie gegenüber der atomaren Bindungsenergie an Bedeutung zu gewinnen. Dies rechtfertigt weiterhin unser Vorgehen, dass die theoretischen Kernmodelle, die wie sich zeigen wird, erst bei hohen Dichten Verwendung finden, nicht um die atomare Bindungsenergie korrigiert werden.

Vergleicht man die Screening-Energie mit der Gitterenergie W_L aus Glg. 2.14, so erhält man:

$$\frac{W_{Sc}}{W_L} \simeq 0,54 \frac{\mu_e}{m_e x} Z^{2/3} \alpha \quad (2.39)$$

$$\sim \begin{cases} 0,54 Z^{2/3} \alpha / x, & \text{für } x \ll 1 \\ 0,54 Z^{2/3} \alpha \ll 1, & \text{für } x \gg 1 \end{cases} . \quad (2.40)$$

Die Screening-Energie stellt also den nächsthöheren Korrekturterm zur Energiedichte der Elektronen nach der Gitterenergie dar.

2.2.4 Die Austauschenergie

Bisher wurde die Fermi-Dirac-Statistik in Bezug auf die kinetische Energie der Elektronen, aber nicht in Bezug auf den Effekt, den antisymmetrische Wellenfunktionen

auf die elektrostatische Wechselwirkungsenergie haben, berücksichtigt. Berechnet man mit total antisymmetrischen Wellenfunktionen die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen Paaren von Elektronen, so kann man zwischen „direkten“ und „Austauschtermen“ unterscheiden. Die Summe aller direkten Terme ergibt eine Energie, die exakt der Coulomb-Energie einer klassischen Ladungsverteilung mit der Dichte der Elektronen entspricht. Diese Beiträge sind in der Gitterenergie W_L bereits mit berücksichtigt. Die bisher fehlenden Austauschtermine werden in der Austauschenergie W_{Ex} zusammengefasst. Zunächst wird das Matrixelement der elektromagnetischen Wechselwirkung zwischen einem Paar (antisymmetrischer) Elektronen als ebene Wellen mit Impuls p_1 und p_2 berechnet. Anschließend werden jeweils p_1 und p_2 über das Innere der Fermikugel mit Radius p_{F_e} im Impulsraum gemittelt. Des Weiteren wird noch eine Mittelung über den Spin der Elektronen durchgeführt. Die Mittelung über die Impulse führt zu einem komplizierten Doppelintegral, das jedoch analytisch gelöst werden kann:

$$\begin{aligned}\beta &= x + \sqrt{1+x^2} \\ \phi(x) &= \frac{1}{4x^4} \left[\frac{9}{4} + 3 \left(\beta^2 - \frac{1}{\beta^2} \right) \ln \beta - 6 (\ln \beta)^2 - \left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \left(\beta^4 + \frac{1}{\beta^4} \right) \right] \\ W_{Ex} &= -Z \frac{3}{4\pi} \alpha m_e c^2 x \phi(x) .\end{aligned}\tag{2.41}$$

Auch die Austauschenergie erzeugt einen zusätzlichen Druckbeitrag zum Gesamtdruck P :

$$\begin{aligned}P_{Ex} &= -n_N W_{Ex} - n_N Z \alpha \frac{m_e c^2}{16\pi x^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \\ &\quad \cdot \left[-\frac{1}{2} \left(\beta^3 - \frac{1}{\beta^5} \right) + \beta - \frac{1}{\beta^3} + 6 \ln \beta \left(\frac{1}{\beta^3} - \frac{2}{\beta} + \beta \right) \right] .\end{aligned}\tag{2.42}$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall ($x \ll 1$) läuft $\phi(x)$ gegen 1, und man erhält für W_{Ex} :

$$W_{Ex}^{(nr)} = -Z \frac{3}{4\pi} \alpha m_e c^2 x .\tag{2.43}$$

Beim Übergang zum relativistischen Grenzfall ($x \gg 1$) kommt es bei $x \approx 2.53$ zu einem Vorzeichenwechsel, im ultrarelativistischen Limes konvergiert $\phi(x)$ gegen $-\frac{1}{2}$:

$$W_{Ex}^{(r)} = Z \frac{3}{8\pi} \alpha m_e c^2 x .\tag{2.44}$$

Die Austauschenergie kann ebenfalls wieder mit der Gitterenergie W_L aus Glg. (2.14) verglichen werden:

$$\begin{aligned} \frac{W_{Ex}}{W_L} &\simeq 0,51 Z^{-2/3} \phi(x) \\ &\sim \begin{cases} 0,51 Z^{-2/3}, & \text{für } x \ll 1 \\ -0,26 Z^{-2/3} \ll 1, & \text{für } x \gg 1 \end{cases} . \end{aligned} \quad (2.45)$$

Die Austauschenergie stellt also einen weiteren Korrekturterm zur Gitterenergie dar, der ungefähr von derselben Größenordnung wie die Screening-Energie ist.

2.2.5 Weitere mögliche Korrekturen

Neben den bisher vorgestellten, werden in [Sal61] weitere Korrekturen betrachtet, die noch unterhalb der Größe der Austauschenergie liegen, und daher in der folgenden Rechnung keine Berücksichtigung finden.

Zum einen ist dies die Korrelationsenergie, die den Term nächsthöherer Ordnung nach der Austauschenergie darstellt, der in der Auswertung der Wechselwirkung zweier Elektronen auftritt:

$$W_{cor} = -(0,180 + 0,031 \ln x) \alpha^2 m_e c^2 . \quad (2.46)$$

Im Vergleich mit W_{Ex} aus Glg. (2.41) erhält man:

$$\frac{W_{cor}}{W_{Ex}} \simeq (0,754 + 0,130 \ln x) \frac{\alpha}{Z x \phi(x)} . \quad (2.47)$$

Die Korrelationsenergie ist also eine Ordnung in α kleiner als die Austauschenergie, und nimmt mit wachsendem x ab. Doch selbst für $x = 0,01$ (die Kruste beginnt bei $x \sim 0,17$) erhält man mit $Z = 26$ nur den vernachlässigbar kleinen Wert $W_{cor}/W_{Ex} \sim 4 \cdot 10^{-3}$. Der Betrag der Korrelationsenergie liegt somit im Bereich der Fehler der Näherungen, die zur Berechnung anderer verwendeter Größen wie z. B. W_{Sc} gemacht wurden.

Neben der Korrelationsenergie werden in [Sal61] noch Selbstenergie-Terme der Elektronen und Effekte des Gradienten des elektrostatischen Potentials betrachtet, von denen gezeigt werden kann, dass diese tatsächlich verschwinden oder ausgesprochen klein sind.

Wenn im folgenden von den „Termen/Korrekturen/Erweiterungen höherer Ordnung“ gesprochen wird, so ist damit die Summe aus B_{el} , W_{Sc} , W_{Ex} , und der im nächsten Abschnitt vorgestellten Nullpunktsenergie W_{zp} der Ionen gemeint.

2.3 Stabilität des Gitters

Wie sich zeigen wird, spielt das Gitter eine entscheidende Rolle für die Bestimmung der Grundzustandskerne. Daher ist es notwendig sich zu fragen, unter welchen Bedingung das Gitter überhaupt einen stabilen Zustand darstellt.

2.3.1 Nullpunktsbewegung der Ionen

Bisher wurden die positiven Ionen als im perfekten Gitter absolut fest fixierte Teilchen betrachtet. Nun soll die Nullpunktsenergie der tatsächlichen Bewegung der Ionen abgeschätzt werden. Hierzu wird die potentielle Energie eines Ions im elektrischen Feld der umgebenden, homogen verteilten Elektronen berechnet. Dabei werden nur kleine Auslenkungen im Vergleich zum Gitterabstand betrachtet und alle anderen Ionen und Elektronen als ungestört angenommen. Mit dem elektrischen Feld der Elektronen (der zweite Term in Glg. (2.10)) findet man für das elektrische Potential des Ions relativ zur Ruhelage:

$$V(r) = \frac{1}{2} \frac{Z^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta r^2}{R^3}, \quad (2.48)$$

wobei δr die Auslenkung des Ions aus der Ruhelage bezeichnet und R der Radius der sphärischen, neutralen Wigner-Seitz-Zelle ist:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{n_N}. \quad (2.49)$$

Das Ion befindet sich somit im Grundzustand eines dreidimensionalen harmonischen Oszillators mit Federkonstante $K = W_N \omega_0^2$ und der Grundzustandsenergie $W_{zp} = 3/2 \hbar \omega_0$:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Z^2 n_N}{3\epsilon_0 W_N}} \quad (2.50)$$

$$\Rightarrow W_{zp} = \frac{3}{2} \hbar \sqrt{\frac{Z^2 n_N}{3\epsilon_0 W_N}}, \quad (2.51)$$

bzw. in natürlichen Einheiten:

$$W_{zp} = \sqrt{\frac{\alpha Z (x m_e)^3}{\pi W_N}}. \quad (2.52)$$

Das Verhältnis der Nullpunktsenergie zur Gitterenergie (Glg. (2.14)) ist dann:

$$\begin{aligned} f = \frac{W_{zp}}{W_L} &\simeq -\frac{1}{0,46684} \sqrt{\frac{m_e x}{\alpha \pi W_N}} Z^{-7/6} \\ &\sim -0,33 \sqrt{\frac{x}{A}} Z^{-7/6} . \end{aligned} \quad (2.53)$$

f wird also groß bei extrem hohen Dichten oder bei kleinen Kernen mit geringer Massen- und Ladungszahl. Das Verhältnis der Amplitude der Nullpunktsbewegung zum Gitterabstand ist von der Größenordnung \sqrt{f} . Sollte dieses Verhältnis groß werden, so ist die Annahme eines festen Gitters nicht mehr gerechtfertigt. Die Ionen wären eher, wie die Elektronen, als freies Gas zu betrachten, so dass die gesamte Coulomb-Energie nahezu verschwinden würde. Stattdessen müsste man nun die kinetische Energie der Ionen mit berücksichtigen. Da, wie sich zeigen wird, die Größe der Kerne aber mit der Dichte anwächst, und x selber nicht größer als 30 wird, bleibt das Verhältnis f über den gesamten Dichtebereich der äußeren Kruste vernachlässigbar klein. Der Gewinn an Coulomb-Energie durch das Gitter dominiert über der Nullpunktsenergie der auf feste Gitterpunkte beschränkte Ionen. Das Gitter ist also stabil gegenüber der Nullpunktsbewegung der Ionen.

2.3.2 Schmelztemperatur des Gitters

Auch das Hinzufügen von Wärme kann das Gitter zum Schmelzen bringen. Um den Effekt einer endlichen Temperatur zu untersuchen, betrachtet man das Verhältnis von Gitterenergie (Glg. (2.12)) der Wigner-Seitz-Zelle zur thermischen Energie W_T des Kerns, ausgedrückt durch den dimensionslosen Parameter Γ :

$$\frac{W_L}{W_T} \propto \frac{Z^2}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{kT} =: \Gamma , \quad (2.54)$$

mit dem Radius der Wigner-Seitz-Zelle R , und der Boltzmannkonstanten k . Erst für große Werte von Γ wird die Coulomb-Kraft so entscheidend, dass sich aus einem beinahe idealen, freien Gas ein periodisches Gitter kristallisiert, um die Coulomb-Wechselwirkung zu minimieren. Als gute Abschätzung zur Bestimmung des Schmelzpunktes dient „Lindemanns empirische Regel“ [Lin10], die besagt, dass das Gitter schmilzt, wenn für die mittleren thermisch induzierten quadratischen Fluktuationen gilt:

$$\frac{\langle(\delta r)^2\rangle}{R^2} \sim \frac{1}{16} . \quad (2.55)$$

Die Fluktuationen δr werden wieder als Auslenkung im Potential des dreidimensionalen harmonischen Oszillators mit Federkonstante $K = W_N \omega_0^2$ betrachtet. Jeder

Freiheitsgrad trägt $kT/2$ zur mittleren Energie bei:

$$\frac{1}{2}K\langle(\delta r)^2\rangle \approx \frac{3}{2}kT. \quad (2.56)$$

Dies führt zu:

$$\langle(\delta r)^2\rangle \approx \frac{3kT}{W_N\omega_0^2}. \quad (2.57)$$

Eine genauere Berechnung, die auf den Normalmoden der Vibration des Ions im Gitter basiert, ergibt folgenden numerischen Koeffizienten [MR67]:

$$\langle(\delta r)^2\rangle \simeq \frac{14kT}{W_N\omega_0^2}. \quad (2.58)$$

Zusammen mit Glg. (2.55) und (2.50) findet man nun für den Schmelzpunkt:

$$\Gamma_m \sim 75. \quad (2.59)$$

Weitergehende detaillierte Rechnungen ergeben Werte von $\Gamma \simeq 126$ [BST66] bis $\Gamma \simeq 168$ [SDD80].

Die aus Γ_m resultierende Schmelztemperatur T_m ist:

$$T_m \simeq \frac{Z^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\Gamma_m k} \left(\frac{4\pi n_N}{3} \right)^{1/3}. \quad (2.60)$$

Bei einer Kern-Dichte von 10^{26} 1/cm^3 , was der Dichte am äußersten Rand der Kruste entspricht, und mit $\Gamma_m = 150$ erhält man für Eisen mit $Z = 26$:

$$T_m \approx 8 \cdot 10^8 \text{ K} \approx 80 \text{ keV}. \quad (2.61)$$

Die typischen Temperaturen in der äußeren Kruste nicht akkretierender kalter Neutronensterne liegen im Bereich weniger keV und damit deutlich unter der Schmelztemperatur von 80 keV. Das Gitter ist also stabil gegenüber dem Einfluss der Temperatur und in dieser Hinsicht die Annahme von $T = 0$ gerechtfertigt.

Kapitel 3

Theoretische Kernmodelle

In diesem Kapitel werden die theoretischen Kernmodelle, welche in dieser Arbeit zur Berechnung der äußeren Kruste Verwendung fanden, vorgestellt und beschrieben. In Tabelle 3.1 findet man hierzu einen Überblick über die verwendeten Parametrisierungen, deren Zugehörigkeit zu den verschiedenen Typen von Kernmodellen und die jeweiligen Referenzen. Von den Parametrisierungen werden Massentabellen benötigt, die sich von den bekannten Audi-Wapstra-Kernen bis zur Neutronen-Dripline erstrecken. Hierbei langt es, sich auf Kerne mit geraderer Neutronen- und Protonenzahl (so genannte „gg-Kerne“) zu beschränken. Für diese Kerne führt die Paarkraft zu einer erhöhten Bindungsenergie im Vergleich zu der benachbarter Kerne, so dass ausschließlich gg-Kerne in der äußeren Kruste auftreten können. In Abb. A.1 sind alle verfügbaren Nuklide jeder Massentabelle grafisch dargestellt.

3.1 Tröpfchen-Modelle

In Tröpfchen-Modellen wird der Kern als ein Flüssigkeitstropfen, also ein Objekt mit homogen verteilter Materie, niedriger Kompressibilität und scharfer Oberfläche aufgefasst. Das älteste und bekannteste theoretische Kernmodell ist ebenfalls ein Tröpfchen-Modell, die semi-empirische „Bethe-Weizsäcker-Massenformel“ [BB36, Wei35]:

$$B(A) = a_{Vol}A + a_{Surf}A^{2/3} + a_{Coul}Z^2A^{-1/3} + a_{Sym}\frac{(N - Z)^2}{A} + \delta(A) , \quad (3.1)$$

wobei $B = b \cdot A$ die totale Bindungsenergie des Kerns ist.

Modell	Parametrisierung	Kommentare	Referenzen
Tröpfchen	BPS	verwendet in [BPS71]	[MS66]
	FRDM	Finite Range Droplet Model	[MNMS95, MNK97]
Nicht-relativistisch	SkM*	Skyrme HF + BCS	[BQB ⁺ 82, SDN ⁺ 03, DSN04]
	SkP	Skyrme HFB	[DFT84, SDN ⁺ 03, DSN04]
	SLy4, SLy4HO	Skyrme HFB	[CBH ⁺ 97, CBH ⁺ 98a, CBH ⁺ 98b, SDN ⁺ 03, DSN04]
	BSk2	Skyrme HFB	[SGH ⁺ 02, GSH ⁺ 02]
	BSk8	Skyrme HFB	[GSBP03, SGBP04]
	MSk7	Skyrme HF + BCS	[TGPO00, GTP01]
	SkSC4	ETFSI method + BCS	[APDT92]
	SkSC18	ETFSI method + BCS	[Gor00, TGPO00]
Relativistisch	Chiral	chirales effektives Modell	[PZS ⁺ 99, BPZ ⁺ 02, Sch02, Sch03]
	NL3	nukleare Feldtheorie	[LKR97, LRR99]
	NL-Z2	nukleare Feldtheorie	[BRR ⁺ 99]
	PCF1	nukleare Punktkopplung	[BMMR02]
	TMA	nukleare Feldtheorie	[GTM05]

Tabelle 3.1: Die verwendeten Massentabellen, deren zugrunde liegenden theoretischen Konzepte und die zugehörigen Referenzen. Die Massentabellen SkM*, SkP, SLy4 und SLy4HO wurden von der öffentlich zugänglichen Webseite <http://www.fuw.edu.pl/~dobaczew/thodri/thodri.html> herunter geladen. BSk2, BSk8, MSk7, SkSC4 und SkSC18 stammen von der Internetseite <http://www-astro.ulb.ac.be/Html/masses.html>.

Anhand dieser einfachen Beschreibung können grundlegende Informationen über Kernmaterie gewonnen werden. Der erste Term ist die Volumenenergie, welche die konstante Bindungsenergie pro Nukleon beschreibt. Der zweite Term ist proportional zum Quadrat des Radius des Kerns ($R \propto A^{1/3}$) und berücksichtigt die schwächere Bindung der Nukleonen an der Oberfläche – die Oberflächenenergie. Der dritte Term beschreibt die repulsive Coulomb-Energie des homogen geladenen, sphärischen Tröpfchens. Der Symmetrieterm zeigt die Abnahme der Bindungsenergie bei ungleicher Protonen- und Neutronenzahl. Der letzte Term, der Paarungsterm, repräsentiert die Tatsache, dass Kerne mit gerader Neutronen- und Protonenzahl stärker als Kerne mit ungerader/gerader Kombination („ug-Kerne“) und diese wiederum stärker als Kerne mit ungerader Neutronen- und Protonenzahl („uu-Kerne“) gebunden sind. Dies ist auch der Grund, wieso in der äußeren Kruste nur gg-Kerne als Grundzustand auftauchen. Die Volumen- und Symmetrienergie sind innere Eigenschaften der Kernmaterie, wohingegen Oberflächen- und Coulomb-Energie von der Kernform und -größe abhängen.

Die freien Parameter dieser Massenformel werden an experimentell bestimmten Kernmassen angepasst, und man erhält [Cor00, GM95]:

$$\begin{aligned} a_{Vol} &= 15,85 \text{ MeV} & a_{Surf} &= -18,34 \text{ MeV} \\ a_{Coul} &= -0,71 \text{ MeV} & a_{Sym} &= -23,21 \text{ MeV} , \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\delta(A) = \begin{cases} 11,46 \cdot A^{-1/2} \text{ MeV} & \text{für gg-Kerne} \\ 0 & \text{für ug-Kerne} \\ -11,46 \cdot A^{-1/2} \text{ MeV} & \text{für uu-Kerne} \end{cases} \quad (3.3)$$

In Abb. 3.1 werden die einzelnen Beiträge zur gesamten Bindungsenergie dargestellt und mit den experimentellen Daten verglichen. Zunächst wächst die Bindungsenergie pro Nukleon mit A an, da der zunächst dominierende repulsive Oberflächenterm mit der Größe des Kerns absinkt. Andererseits beginnt gleichzeitig die Coulomb-Energie anzuwachsen, die gering geladene Kerne bevorzugt. Die niedrigere Symmetrienergie favorisiert hingegen eine ungefähr gleiche Anzahl von Protonen und Neutronen. So ergibt sich der stabilste Kern bei gegebenem A aus dem Wechselspiel zwischen Oberflächen-, Coulomb- und Symmetrienergie. Schließlich wachsen Coulomb- und Symmetrienergie schneller an als die Oberflächenenergie fällt, so dass die Bindungsenergie pro Nukleon nach dem Maximum bei $A \sim 60$ (exakt bei ^{56}Fe) wieder kleiner wird. Die Paarungsenergie verliert für große Kerne gegenüber den anderen Beiträgen an Bedeutung.

Natürlich kann ein derart einfaches Modell nicht die starken Unterschiede in den Bindungsenergien, wie sie bei den leichten Kernen auftreten, beschreiben. Bei einer geringen Anzahl an Konstituenten, wenn die Größe eines Nukleons im Vergleich mit

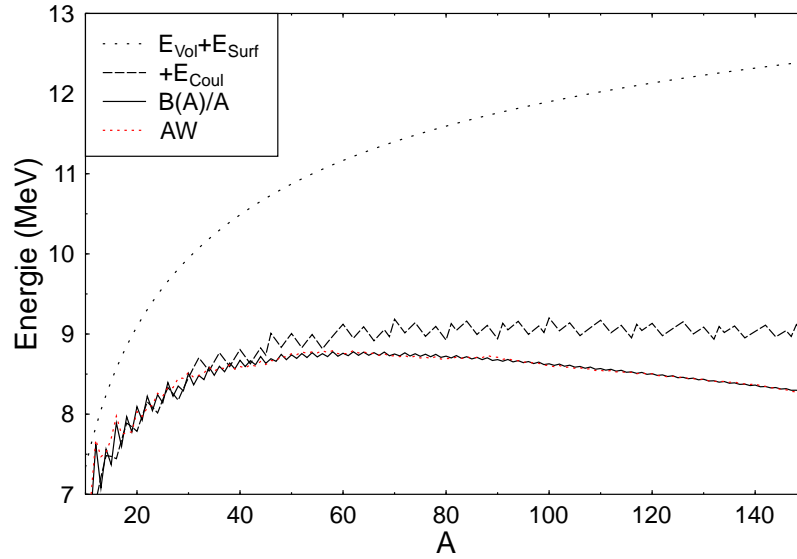


Abbildung 3.1: Die Bindungsenergie pro Nukleon $B(A)/A$ für das jeweils am stärksten gebundene Nuklid mit Massenzahl A , und die zugehörigen Beiträge der Volumen- (E_{Vol}), Oberflächen- (E_{Surf}) und Coulomb-Energie (E_{Coul}). AW bezeichnet die experimentell bestimmten Bindungsenergien aus dem Audi-Wapstra-Katalog [AWT03].

der Größe des Kerns als Ganzes nicht mehr vernachlässigbar wird, ist das Bild des Flüssigkeitströpfchens nicht mehr geeignet. Auf der anderen Seite gibt dieses Modell für Kerne mit $A > 30$ die Bindungsenergien mit einer guten Genauigkeit von etwa 1 % wieder.

3.1.1 Verwendete Parametrisierungen

Zur Berechnung der äußeren Kruste wurde in [BPS71] das Tröpfchen-Modell von Myers und Swiatecki [MS66] verwendet. Mit dieser Massentabelle wird in der vorliegenden Arbeit die ursprüngliche Sequenz an Grundzustandskernen, die BPS ermittelten, für den Vergleich mit den aktuellsten theoretischen Kernmodellen reproduziert.

Die neueste Version des Tröpfchenmodells von Möller und Nix, das „Finite Range Droplet Model“ (**FRDM**) [MNMS95, MNK97], stellt eine aktuelle, komplexe Version der oben beschriebenen Bethe-Weizsäcker-Formel dar. Die Berechnung der Massen basiert auf einem makroskopischen endliche-Reichweite-Tröpfchen-Modell mit einem mikroskopischen gefalteten-Yukawa-Einteilchen-Potential von 1981 [MN81b, MN81a]. Hierbei wurde in der letzten Veröffentlichung das makroskopische Modell weiter verbessert und eine neue Form der Paarkraft verwendet. Des Weiteren wur-

den bei der Minimierung der Grundzustandsenergie zusätzliche Freiheitsgrade der Deformation berücksichtigt.

In der resultierenden Massentabelle werden die atomaren Massen als Massenüberschuss und die Grundzustandsdeformationen von 8979 Kernen angegeben. Die Tabelle beginnt mit ^{16}O und erstreckt sich von der Protonen- bis zur Neutronen-Dripline über die gesamte Nuklidkarte bis $A = 339$. Aus dem Massenüberschuss E kann direkt die Masse des Kernels gewonnen werden:

$$W_N = (E + A) \text{ amu} \quad (3.4)$$

Das FRDM-Modell hat neun freie Parameter, die mit der Methode der kleinsten Quadrate aus den bekannten Grundzustandsmassen von 1654 Kernen und 28 Spaltbarrieren bestimmt wurden. Hierbei wurde ein mittlerer Fehler von 0,448 MeV für die Massen aller betrachteten Kerne erreicht. Somit stellt FRDM eine der besten Parametrisierungen der Massen bekannter Kerne über die gesamte Nuklidkarte hinweg dar.

3.2 Nichtrelativistische Modelle

3.2.1 Selbstkonsistente Rechnungen

Tröpfchen-Modelle liefern eine ausgezeichnete Beschreibung bekannter Bindungsenergien, ihnen fehlt jedoch eine tiefer liegende mikroskopische Motivation. Ein wesentlicher Anspruch an theoretische Modelle ist im Allgemeinen die Qualität der Vorhersagen, die sie für den experimentell (noch) nicht zugänglichen Bereich machen. Hierzu ist eine möglichst kleine Anzahl notwendiger Zusatzannahmen, im Idealfall eine „Ab-initio-Rechnung“, erstrebenswert, was im Bereich der Kernphysik eine mikroskopisch motivierte Theorie erfordert. Bisher ist es jedoch nicht möglich die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung aus der zugrunde liegenden Theorie der Quantenchromodynamik abzuleiten, weshalb immer zusätzliche Modellbildung notwendig ist. Hier gehen so genannte „selbstkonsistente Rechnungen“ weiter als Tröpfchen-Modelle, sie verzichten auf Annahmen zur Dichteverteilung oder zu den Potentialen im Kern, da Wellenfunktionen und Kernpotentiale iterativ auseinander bestimmt werden. Hierzu gibt es viele verschiedene Ansätze, von denen einer das nichtrelativistische, so genannte „Skyrme-Hartree-Fock“-Modell (SHF) ist.

3.2.2 Die Hartree-Fock-Näherung

Mikroskopische Modelle benötigen einen Hamiltonoperator \hat{H} , der eine geeignete Form der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung enthält. Im allgemeinen Fall stellt die

Bestimmung eines Eigenzustandes des Hamiltonoperators der Vielteilchenwellenfunktion für A Nukleonen ein unlösbares Problem dar, da die Nukleonen alle möglichen Einteilchenzustände (normalerweise unendlich viele) in jeder Kombination besetzen. Die Hartree-Fock-Näherung ermöglicht eine Lösung, indem sie die funktionale Form der Wellenfunktion einschränkt: die Summe über alle unterschiedlichen Besetzungen in der Nukleonen-Vielteilchenwellenfunktion wird durch einen einzelnen Term, eine Slater-Determinante, ersetzt:

$$\Psi = \prod_{i=1}^A \hat{a}_i^+ |0\rangle . \quad (3.5)$$

Dies bedeutet, dass die Nukleonen als voneinander unabhängige, unkorrelierte Teilchen betrachtet werden und wird auch als „Unabhängige-Teilchen-Näherung“ bezeichnet.

Die Gesamtwellenfunktion Ψ ergibt sich dann als total antisymmetrisiertes (da es sich um Fermionen handelt) Produkt von Einteilchenwellenfunktionen $\phi_i, i = 1 \dots A$. Man erhält eine optimale Näherung der Wellenfunktion Ψ an den Grundzustand des Hamiltonoperators, wenn deren Energieerwartungswert minimal ist. Dies führt auf das folgende Variationsprinzip:

$$\delta \left(\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle - E \langle \Psi | \Psi \rangle \right) \quad (3.6)$$

mit dem zusätzliche Variationsparameter E , der die Normierung von Ψ gewährleistet.

Aus dem Variationsprinzip folgen die Hartree-Fock-Gleichungen, die für jeden Einteilchenzustand die Gestalt von Schrödingergleichungen haben:

$$\begin{aligned} \epsilon_i \phi_i(\mathbf{r}) = & -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi_i(\mathbf{r}) \\ & + \left(\int v(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \sum_{j=1}^A |\phi_j(\mathbf{r}')|^2 d^3 r' \right) \phi_i(\mathbf{r}) \\ & - \sum_{j=1}^A \phi_j(\mathbf{r}') \int v(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \phi_j^*(\mathbf{r}') \phi_i(\mathbf{r}') d^3 r' . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Neben dem Term der kinetischen Energie findet man in den Gleichungen ein „mittleres Potential“ als „direkten Term“ und den so genannten „Austauschterm“, die zusammen das „mittlere Feld“ bilden. Die Teilchen sind formal voneinander unabhängig, da sie nicht mehr direkt miteinander wechselwirken, sondern nur noch über das von ihnen erzeugte mittlere Feld.

Hier zeigt sich auch der selbstkonsistente Charakter des Hartree-Fock-Verfahrens: Das mittlere Potential wird durch die Dichteverteilung der Nukleonen erzeugt, deren Wellenfunktionen wiederum aus dem mittleren Feld bestimmt werden. In der

Praxis werden oft iterative Lösungsmethoden verwendet, bei denen mit einer versuchsweise geratenen Wellenfunktion begonnen wird. Der in der Antisymmetrie der Vielteilchenwellenfunktion begründete Austauschterm führt hierbei zu erheblichen Schwierigkeiten bei der Lösung der Hartree-Fock-Gleichungen.

3.2.3 Die Skyrme-Kraft

Es zeigt sich, dass zur Beschreibung der Wechselwirkungen im Kern und der auftretenden komplizierten Vielkörpereffekte, „effektive Wechselwirkungen“ bei denen die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung parametrisiert werden, am geeignetsten sind. In Hartree-Fock-Rechnungen finden oft so genannte „Skyrme-Kräfte“ Verwendung. Diese sind proportional zu δ -Funktionen im Ortsraum, was dazu führt, dass die Integrale in den HF-Gleichungen zusammenbrechen und deren Lösung wesentlich vereinfachen.

Skyrme-Kräfte beinhalten sowohl Zwei- als auch Dreikörperwechselwirkungen:

$$\hat{H} = \sum_i \hat{t}_i + \sum_{i<j} \hat{v}_{ij}^{(2)} + \sum_{i<j<k} \hat{v}_{ijk}^{(3)}. \quad (3.8)$$

Der Zweikörperbeitrag wird oft folgendermaßen parametrisiert:

$$\begin{aligned} \hat{v}_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = & t_0(1 + x_0 \hat{P}_\sigma) \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \\ & + \frac{1}{2} t_1 \left[\delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \hat{k}^2 + \hat{k}'^2 \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right] \\ & + t_2 \hat{\mathbf{k}}' \cdot \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \hat{\mathbf{k}} \\ & + i W_0 (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j) \cdot \hat{\mathbf{k}}' \times \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die Operatoren $\hat{\mathbf{k}}$ und $\hat{\mathbf{k}}'$ sind definiert als:

$$\hat{\mathbf{k}} = (\nabla_i - \nabla_j)/2i, \quad \hat{\mathbf{k}}' = -(\nabla_i - \nabla_j)/2i, \quad (3.10)$$

mit der Konvention, dass $\hat{\mathbf{k}}'$ nach links wirkt. Der Dreikörperbeitrag ist eine reine Kontaktwechselwirkung:

$$\hat{v}_{ijk}^{(3)} = t_3 \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k). \quad (3.11)$$

Beschränkt man sich auf die Beschreibung von gg-Kernen, so wird aus der Dreikörperkraft ein dichteabhängiges Zweikörperpotential:

$$\hat{v}_{ij}^{(3)} = \frac{1}{6} t_3 (1 + P_\sigma) \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \rho \left[\frac{1}{2} (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \right]. \quad (3.12)$$

Um eine bessere Beschreibung der Kompressibilität von Kernmaterie zu erreichen, wurden die so genannten „modifizierten Skyrme-Kräfte“ eingeführt, bei denen die lineare Dichteabhängigkeit durch einen Potenzansatz ersetzt wird:

$$\hat{v}_{ij}^{(3)} = \frac{1}{6}t_3(1 + P_\sigma)\delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\rho^\lambda \left[\frac{1}{2}(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \right] . \quad (3.13)$$

Insgesamt gibt es in dieser Form der Parametrisierung also sieben freie Parameter $t_0, t_1, t_2, t_3, x_0, W_0$ und λ mit denen das SHF-Modell an Kerneigenschaften angepasst werden kann.

3.2.4 Die Paarkraft

Das Einteilchenmodell, bei der die Gesamtenergie des Kerns nur von den besetzten Einteilchenenergien abhängt, weist allerdings einige Unzulänglichkeiten auf. Dies wird z. B. am Gesamtdrehimpuls eines sphärischen Kerns deutlich. Jedem Einteilchenzustand kann eine Drehimpulsquantenzahl j und eine Magnetquantenzahl m zugeordnet werden. Die j -Schale bezeichnet die Menge aller Zustände mit $m = -j, \dots, j$. Für jede j -Schale gibt es nun zwei Möglichkeiten:

- Bei abgeschlossener Schale, d. h. wenn alle Unterzustände mit unterschiedlichem m besetzt sind, ergibt sich der Gesamtdrehimpuls immer zu null.
- Falls nur ein Teil der Zustände besetzt ist, gibt es verschiedene Möglichkeiten der Kopplung zum Gesamtdrehimpuls. Da aber die Gesamtenergie nur von den Einteilchenenergien abhängt, erwartet man eine Entartung der unterschiedlichen Gesamtdrehimpulse.

Experimentell ergibt sich aber ein anderes Bild. Man findet stattdessen folgende Zusammenhänge:

- Der Grundzustand aller gg-Kerne besitzt den Gesamtdrehimpuls null.
- gg-Kerne sind stärker gebunden als ug- oder uu-Kerne.
- gg-Kerne weisen eine Energielücke von 1 – 2 MeV vom Grundzustand bis zur niedrigsten Einteilchenanregung auf.

Wie schon beim Tröpfchen-Modell, muss also auch das SHF-Modell um die Tatsache erweitert werden, dass die Restwechselwirkung die Kopplung zu Paaren und zum Gesamtdrehimpuls null stark begünstigt. Hierfür wird ein zum Paarungsterm in Glg. (3.1) analoger Paarkraftformalismus verwendet.

Das BCS-Modell

Das bekannteste Modell zur Behandlung von Paarkorrelationen ist die BCS-Theorie von J. Bardeen, L. N. Cooper und J. R. Schrieffer aus dem Jahre 1957 [BCS57]. Ursprünglich entwickelt zur Beschreibung von Supraleitung in Festkörpern, wurde sie erstmals von Å. Bohr, B. R. Mottelson, D. Pines [BMP58] und S. T. Belyaev [Bel59] auf Atomkerne angewandt.

Im BCS-Modell koppeln Paare entarteter, einander zeitumgekehrter Zustände $(k, -k)$ über eine starke kurzreichweitige Kraft. Der Einteilchen-Hamiltonoperator wird um einen Anteil erweitert, der nur auf solche Paare wirkt:

$$\hat{H} = \sum_k \epsilon_k^0 \hat{a}_k^+ \hat{a}_k - \sum_{kk' > 0} \langle k, -k | v | k', -k' \rangle \hat{a}_k^+ \hat{a}_{-k}^+ \hat{a}_{-k'} \hat{a}_{k'} . \quad (3.14)$$

In dem Matrixelement $\langle k, -k | v | k', -k' \rangle$ kommen Annahmen über die Funktionale Form der Paarkraft zur Verwendung. Der einfachste denkbare Fall ist die so genannte „constant-strength-Näherung“ mit konstanter Paarkraft:

$$\langle k, -k | v | k', -k' \rangle = -G \quad (3.15)$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \sum_k \epsilon_k^0 \hat{a}_k^+ \hat{a}_k - G \sum_{kk' > 0} \hat{a}_k^+ \hat{a}_{-k}^+ \hat{a}_{-k'} \hat{a}_{k'} . \quad (3.16)$$

Basierend auf dem „BCS-Zustand“

$$|BCS\rangle = \prod_{k>0}^{\infty} (u_k + v_k \hat{a}_k^+ \hat{a}_{-k}^+) |0\rangle \quad (3.17)$$

ist eine Näherungslösung möglich. Hierbei bezeichnet $|v_k|^2$ die Besetzungswahrscheinlichkeit jedes Paares von Einteilchenniveaus $(k, -k)$. $u_k^2 + v_k^2 = 1$ folgt aus der Normierung von $|BCS\rangle$. Einteilchenzustände, bei denen weder u_k^2 noch v_k^2 gleich eins sind, verursachen eine unphysikalischen Unbestimmtheit in der Teilchenzahl, die wiederum zu einer Reihe von Problemen in praktischen Rechnungen führt. Allerdings kommt der Paarkrafteffekt gerade über diese fraktional besetzten Zustände hinein, da man andernfalls wieder zum reinen Einteilchenmodell zurückgehen würde. Da die Teilchenzahl nicht erhalten ist, muss diese als Zwangsbedingung in das Variationsprinzip mit aufgenommen werden:

$$\delta \langle BCS | \hat{H} - \lambda \hat{N} | BCS \rangle = 0 . \quad (3.18)$$

Hieraus bestimmt sich die Besetzungswahrscheinlichkeit

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}} \right) \quad (3.19)$$

in Abhängigkeit von der Einteilchenenergie ϵ_k und dem „Gap-Parameter“ Δ . Die Einteilchenenergien sind wie folgt definiert:

$$\epsilon_k = \epsilon_k^0 - \lambda - Gv_k^2, \quad (3.20)$$

wobei λ als verallgemeinerte Fermi-Energie interpretiert werden kann. Die Definition des Gap-Parameters

$$\Delta = G \sum_{k' > 0} u_{k'} v_{k'} \quad (3.21)$$

führt mit Glg. (3.19) auf die „Gap-Gleichung“:

$$\Delta = \frac{G}{2} \sum_{k > 0} \frac{\Delta}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}}. \quad (3.22)$$

Berücksichtigt man die Bedingung für die Gesamtteilchenzahl

$$\sum_{k < 0} 2v_k^2 = N, \quad (3.23)$$

so hat man ein Gleichungssystem, dass mit bekanntem G und bekannten ϵ_k^0 iterativ gelöst werden kann. Oft wird der Gap-Parameter aber auch als vorgegebener Parameter verwendet.

In der Gap-Gleichung tragen vor allem Niveaus in der Nähe der Fermi-Energie bei. Da Neutronen- und Protonen-Fermi-Energien in der Regel weit auseinander liegen, wird die Gap-Gleichung oft für Protonen und Neutronen getrennt aufgeschrieben. In diesem Fall gibt es auch separate Stärken G_p , G_n , Gap-Parameter Δ_p , Δ_n und Fermi-Energien λ_p , λ_n für Protonen und Neutronen. Typische Werte sind:

$$G_p \approx 17 \text{ MeV}/A, \quad G_n \approx 25 \text{ MeV}/A. \quad (3.24)$$

Neben der hier geschilderten Form des BCS-Pairings, die bereits auf mehreren Annahmen und Näherungen, wie z. B. der constant-strength-Näherung, beruht, gibt es eine große Vielzahl weiterer, auf dem BCS-Zustand aufbauender Modelle zur Beschreibung der Paarkorrelation. Die Modelle werden hinsichtlich der verwendeten Variationsprinzipien, Projektionsverfahren und der Paarkraft unterschieden, für eine ausführlichere Abhandlung sei auf die entsprechende Fachliteratur verwiesen [GM95, Ben97]. Zwei weit verbreitete Variationsprinzipien sind zum einen HF mit BCS und zum anderen so genannte „Hartree-Fock-Bogolyubov-Rechnungen“ (HFB). Bei der ersten Methode werden die Gleichungen des mittleren Feldes und des Pairings iterativ parallel gelöst, bei HFB wird die Variation mit größerem Aufwand für die Wellenfunktionen und Besetzungswahrscheinlichkeiten gleichzeitig ausgeführt.

Unterscheidungsmerkmale der Paarkräfte sind: Gesamtdrehimpuls der Paare, Isospin der Paare und funktionale Form der Paarkraft. Neben dem oben dargestellten constant-strength-Ansatz ist es auch möglich eine δ -Funktion zu verwenden, die auch dichteabhängig sein kann. Eine andere Alternative der Paarwechselwirkung stellt die Verwendung von Skyrme-Kräften dar.

3.2.5 Deformationen

Bereits in den dreißiger Jahren wurde in der Atomspektroskopie festgestellt, dass Kerne nicht unbedingt kugelförmige Gebilde sein müssen. Abweichungen in der Feinstruktur der Spektren wiesen auf ein elektrisches Quadrupolmoment, und damit auf eine nicht-kugelsymmetrische Ladungsverteilung hin. Dabei ist das Quadrupolmoment in der Nähe der magischen Zahlen klein; weit von abgeschlossenen Schalen entfernt ist es hingegen besonders groß. Dies lässt sich anhand der im Mittel attraktiven Kraft zwischen den Nukleonen erklären: Die in Paaren gruppierten Nukleonen besetzen bevorzugt räumlich benachbarte Orbitale. Für Kerne mit halbgefüllten Schalen führt dies im Allgemeinen zu Deformationen. Bei Anhäufung der Orbitale entlang der Symmetrieachse entsteht eine prolate Deformation; stehen sie senkrecht zur Symmetrieachse bewirkt dies eine oblate Deformation. Neben diesen beiden Formen axialsymmetrischer Deformationen existieren noch die so genannten triaxialen Deformationen, die in den hier verwendeten Massentabellen jedoch nicht berücksichtigt wurden.

Bei der Ermittlung der Energieniveaus deformierter Kerne muss beachtet werden, dass das Kernpotential nicht mehr kugelsymmetrisch ist, und im Falle axialer Deformationen eine ellipsoide Form annimmt. Die Berechnung der Einteilchen-Zustände wird daher technisch besonders aufwändig.

3.2.6 Verwendete Parametrisierungen

Mittlerweile gibt es eine Vielzahl von unterschiedlichen SHF-Parametrisierungen, die sich unter anderem hinsichtlich der verwendeten Skyrme-Kraft, dem Paarungsformalismus, Schalenkorrekturen und den mathematischen Methoden unterscheiden. Des Weiteren müssen für jedes Modell die offenen Parameter bestimmt werden, wofür ebenfalls eine große Auswahl an verschiedenen experimentellen Observablen wie z. B. Bindungsenergien, Diffraktionsradien, Oberflächendicken oder Ladungs- und Neutronendichten zur Verfügung stehen.

Einer der auf effektiven Kernkräften basierenden Ansätze ist die so genannte „erweiterte-Thomas-Fermi-Strutinsky-Integral“-Methode (ETFSI). In der erweiterten Thomas-Fermi-Näherung wird hierbei die Hartree-Fock-Methode auf eine Skyrme-

artige Kraft angewandt. Zusätzlich werden Schalenkorrekturen über die Strutinsky-Integral-Methode eingeführt, das Pairing ist eine δ -Funktion in BCS-Form. **SkSC4** stellt eine der ersten vollständigen Massentabellen dar, die auf der ETFSI-Methode beruhen. Die neun freien Parameter wurden an die Bindungsenergien von 1492 Kernen mit $A \geq 36$ angepasst, die mittlere Abweichung liegt bei 0,730 MeV. Die generierte Massentabelle umfasst alle Kerne mit $36 \leq A \leq 300$ von der Protonen- bis zur Neutronen-Dripline. Es wurden diverse Nachfolgeversionen von SkSC4 entwickelt, von denen der Parametersatz **SkSC18** das gegenwärtig beste ETFSI-Modell darstellt. Die Massentabelle von SkSC18 beinhaltet ungefähr dieselben Kerne wie die von SkSC4.

Bei dem Modell **MSk7** wird eine zehnparametrische Skyrme-Kraft mit einer vierparametrischen Paarkraft in Form einer δ -Funktion mit der Hartree-Fock-BCS-Methode verwendet. Dabei wurde an 1888 verschiedenen deformierten und sphärischen Kernen aus dem Audi-Wapstra-Katalog von 1995 [AW95] mit einem mittleren Fehler von 0,738 MeV gefittet. Die Massentabelle umfasst dabei alle 9200 Nuklide zwischen der Neutronen- und der Protonen-Dripline mit $Z = 8, \dots, 120$ und $N \geq 8$.

Die beiden Parametrisierungen **BSk2** und **BSk8** basieren auf einer ähnlichen Skyrme- und Paarkraft wie MSk7, allerdings wird hier eine volle Skyrme-Hartree-Fock-Bogolyubov-Rechnung (HFB) als Variationsprinzip angewandt. BSk2 stellt die erste HFB-Rechnung der BRUSLIB-Kollaboration dar, die in der Lage war, die Massen der gesamten Nuklidkarte gut zu beschreiben. BSk2 wurde an 2135 Kernen aus [AW95] angefitet, der Fehler liegt mit 0,674 MeV deutlich unter dem von MSk7. Es folgten die Modelle BSk3 bis BSk7 [SGP03, GSBP03], wobei verschiedene Erweiterungen wie z. B. dichteabhängige Paarkraft, Schwerpunktskorrekturen oder Fixierung der isoskalaren effektiven Masse untersucht wurden. Zwar gab es signifikante Unterschiede für einzelne Nuklide, allerdings blieb das globale Verhalten, der mittlere Fehler und auch die Extrapolation zu unbekannten Kernen gegenüber BSk2 weitgehend unverändert. Erst mit BSk8, bei dem die Wellenfunktion auf die exakte Teilchenzahl projiziert wird, konnte die mittlere Abweichung von 2149 experimentell bestimmten Kernen auf 0,635 MeV gesenkt werden. Die Massentabellen von MSk7, BSk2 und BSk8 beinhalten größtenteils die gleichen Kerne der Nuklidkarte mit $8 \leq Z \leq 120$ und $16 \leq A \leq 410$ von der Protonen- bis über die Neutronen-Dripline hinaus.

Beim neuesten Parametersatz dieser Serie, BSk9 [GSPO05], wurde die Symmetrieenergie auf 30 MeV fixiert. Dies ist ungeeignet für die Beschreibung neutronenreicher Kerne, dieser Parametersatz wird daher im Folgenden nicht weiter betrachtet.

Die Massentabellen der bisher beschriebenen Skyrme-Parametrisierungen stammen von der öffentlich zugänglichen Webseite¹ der „Brussels Nuclear Library for Astrophysics Applications“ (BRUSLIB). Für alle Massentabellen wurden axial-sym-

¹<http://www-astro.ulb.ac.be/Html/masses.html>

metrische Deformationen bei der Bestimmung des Grundzustandes mit berücksichtigt.

Die weit verbreiteten Modelle **SkM***, **SkP** und **SLy4** sind ebenfalls nichtrelativistische Skyrme-Parametrisierungen. **SkM*** ist eine modifizierte Version der Parametrisierung **SkM** [KTB80], die Grundzustands-Radien und Multipolmomente gut beschreiben konnte, allerdings systematisch zu hohe Bindungsenergien und zu niedrige Spaltbarrieren lieferte. Durch ein Anheben der Oberflächenspannung in **SkM*** konnten diese Abweichungen korrigiert werden. **SkM*** ist eine Skyrme-Hartree-Fock-Rechnung mit der BCS-Näherung für die Paarkraft.

SkP beruht auf der HFB-Theorie mit besonderer Betonung von Paarungs-Effekten und der Beschreibung neutronenreicher Kerne. Sowohl das mittlere Feld als auch die Paarkraft werden gleichzeitig mit einer Skyrme-Kraft beschrieben. Die Parameter wurden an Eigenschaften von Kernmaterie wie der Symmetrieenergie und weiteren Eigenschaften von ^{16}O und ^{208}Pb angepasst.

Die HFB-Parametrisierung **SLy4** ist darauf ausgelegt, eine bessere Beschreibung des Isospin-Freiheitsgrades von der Linie der β -Stabilität bis hin zu den exotischsten Kernen zu liefern. Hierzu wurde die aus **SLy4** resultierende Zustandsgleichung für Neutronenmaterie an jener von Wiringa et al. [WFF88] angefitet. Des Weiteren wurden die Bindungsenergien und Radien der doppelt magischen Kerne $^{40,48}\text{Ca}$, ^{132}Sn und ^{208}Pb in den Fit miteinbezogen. Für die Berechnung der Massentabelle **SLy4HO** wurde eine numerisch vorteilhafte Erweiterung in einer harmonischen Oszillator-Basis durchgeführt.

Die Massentabellen dieser Parametrisierungen wurden von Dobaczewski et al. für alle gg-Kerne mit $Z = 2, \dots, 108$ und $N = 2, \dots, 188$ bis zur Neutronen-Dripline berechnet, wobei auf die Kerne in der Nähe der Dripline besonderes Augenmerk gelegt wurde. Wie auch schon bei den BRUSLIB-Tabellen wurden zweidimensionale Deformationen mit berücksichtigt. Die resultierenden Massentabellen können auf einer öffentlich zugänglichen Internetseite herunter geladen werden².

Von den nichtrelativistischen, auf Skyrme-Wechselwirkungen basierenden Modellen werden **SLy4** und **BSk8** für den Vergleich mit anderen theoretischen Modellen als die aktuellsten und repräsentativsten ausgewählt.

3.3 Relativistische Modelle

Neben den bisher beschriebenen nichtrelativistischen Skyrme-Hartree-Fock-Modellen sind auch die auf nuklearen Feldtheorien beruhenden relativistischen Modelle

²<http://www.fuw.edu.pl/~dobaczew/thodri/thodri.html>

selbstkonsistente Rechnungen. Eine physikalische Notwendigkeit einer relativistischen Beschreibung liegt nicht etwa in der Geschwindigkeit der Nukleonen, welche sich im Kern mit $v \approx 0,3 c$ nur relativ langsam bewegen, sondern darin, dass die relativistische Beschreibung die Spin-Bahn-Kraft auf natürliche Weise beinhaltet, was zu einer guten Vorhersagekraft führt.

Das erste relativistische Modell zur Beschreibung von Kerneigenschaften war das σ - ω -Modell von J. D. Walecka [Wal74]. Anstatt über Potentiale werden hier die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen über Felder vermittelt. Allein durch das skalare, isoskalare σ -Meson, das den attraktiven Teil der Kernkraft überträgt, und durch das schwerere isoskalare ω -Vektormeson mit stärkerer Kopplung, das zu einer kurzreichweitigen repulsiven Wechselwirkung führt, konnten die Sättigungseigenschaften von Kernmaterie und die Bindungsenergien von Kernen sehr erfolgreich beschrieben werden. Für eine bessere Berücksichtigung von Isospin-abhängigen Effekten in Kernen wird in aktuelleren Modellen zusätzlich noch das isovektorielle ρ -Vektormeson und für die elektromagnetische Wechselwirkung das Photon γ eingeführt. Es zeigt sich, dass die Kopplungskonstante des isovektoriellen, skalaren δ -Mesons verschwindet, oder nur schwer an experimentelle Daten angepasst werden kann.

Die hier vorgestellten Mesonen entsprechen allerdings nicht realen, experimentell beobachtbaren Teilchen, da auch die relativistischen Modelle nur effektive Potentiale beinhalten. Dies zeigt auch, dass trotz der präzisen Vorhersagekraft der relativistischen Modelle die tatsächliche Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung wesentlich komplizierter sein muss, als hier angenommen.

3.3.1 Die Lagrangedichte

Der Ausgangspunkt eines jeden relativistischen Modells ist eine Lagrangedichte \mathcal{L} . Die Lagrangedichte beinhaltet jene der freien Nukleonen, der Mesonenfelder, der Photonen und schließlich der Kopplung (linear und nichtlinear) der Mesonen mit den Nukleonen:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Nukleonen} + \mathcal{L}_{Mesonen} + \mathcal{L}_{Photonen} + \mathcal{L}_{Kopplung} \quad (3.25)$$

Als Fermionen werden die Nukleonen durch die Lagrangedichte der freien Dirac-Gleichung beschrieben

$$\mathcal{L}_{Nukleonen} = \bar{\hat{\psi}}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_N)\hat{\psi} \, , \quad (3.26)$$

wobei unter der Annahme gleicher Masse m_N der Protonen und Neutronen die Nukleonenwellenfunktion $\hat{\psi}$ als Vektor im Isospinraum angesetzt werden kann.

Für das σ -Meson findet die Lagrangedichte der Klein-Gordon-Gleichung Verwendung, für die massiven Vektorbosonen die Proca-Gleichung:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Mesonen}} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \hat{\sigma} \partial^\mu \hat{\sigma} - m_\sigma^2 \hat{\sigma}^2) \\ & - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} \hat{\omega}_{\mu\nu} \hat{\omega}^{\mu\nu} - m_\omega^2 \hat{\omega}_\mu \hat{\omega}^\mu) \\ & - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} \hat{\rho}_{\mu\nu} \cdot \hat{\rho}^{\mu\nu} - m_\rho^2 \hat{\rho}_\mu \cdot \hat{\rho}^\mu)\end{aligned}\quad (3.27)$$

mit den Feldstärketensoren der Vektormesonen:

$$\hat{\omega}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{\omega}_\nu - \partial_\nu \hat{\omega}_\mu, \quad \hat{\rho}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{\rho}_\nu - \partial_\nu \hat{\rho}_\mu. \quad (3.28)$$

Die Lagrangedichte der Photonen folgt aus ihrem Feldstärketensor:

$$\mathcal{L}_{\text{Photonen}} = -\frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu}, \quad \hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu. \quad (3.29)$$

Für die Wechselwirkung wird meist der Ansatz der minimalen Kopplung verwendet:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Kopplung}} = & -g_\sigma \hat{\sigma} \bar{\psi} \hat{\psi} - g_\omega \hat{\omega}_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \hat{\psi} - g_\rho \hat{\rho}_\mu \cdot \bar{\psi} \vec{\tau} \gamma^\mu \hat{\psi} \\ & - e \hat{A}_\mu \bar{\psi} \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \gamma^\mu \hat{\psi} - U_\sigma[\hat{\sigma}] - U_\omega[\hat{\omega}],\end{aligned}\quad (3.30)$$

der um nichtlineare Selbstwechselwirkungen der σ - und ω -Mesonen erweitert wurde:

$$U_\sigma[\hat{\sigma}] = \frac{1}{3} b_2 \hat{\sigma}^3 + \frac{1}{4} b_3 \hat{\sigma}^4, \quad U_\omega[\hat{\omega}] = \frac{1}{4} c_3 (\hat{\omega}_\mu \hat{\omega}^\mu)^2. \quad (3.31)$$

Ausgehend vom Hamiltonschen Prinzip

$$\delta \int \mathcal{L} d^3x dt = 0 \quad (3.32)$$

erhält man die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial q_i / \partial x^\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (3.33)$$

aus denen theoretisch die Bewegungsgleichungen der Nukleonen, Mesonen und Photonen folgen würden. Eine volle Lösung des allgemeinen feldtheoretischen Problems ist aber schlicht unmöglich und erfordert daher weitere Näherungen.

3.3.2 Näherungen

Zunächst werden in der „Mean-Field-Näherung“ oder „Näherung des mittleren Feldes“, die Feldoperatoren der Mesonen und des Photons durch ihre Erwartungswerte ersetzt, z. B.

$$\hat{\sigma} \rightarrow \sigma = \langle \sigma \rangle. \quad (3.34)$$

Die Mesonenfelder fungieren dann als, durch die Nukleonendichten erzeugte, mittlere Potentiale, in denen sich die Nukleonen wie unabhängige, nicht wechselwirkende Teilchen bewegen. Dies erlaubt die Entwicklung der Operatoren des Nukleonenfeldes in Einteilchenzustände $\phi_\alpha(x^\mu)$:

$$\hat{\psi} = \sum_{\alpha} \phi_{\alpha}(x^{\mu}) \hat{a}_{\alpha} . \quad (3.35)$$

Des Weiteren werden in der „No-Sea-Näherung“ alle Zustände negativer Energie, welche die Lösung erheblich erschweren, vernachlässigt. Es wird angenommen, dass sich die Summe aller dieser Zustände und der Vakuumbeitrag gegenseitig aufheben. Somit werden Vakuumpolarisationen vernachlässigt. Dies führt auf eine Reihe besetzter Einteilchenzustände, ϕ_{α} , $\alpha = 1, \dots, \Omega$, welche die skalare Dichte und Vektordichten bestimmen, z. B.

$$\rho_s = \sum_{\alpha=1}^N \omega_{\alpha} \bar{\phi}_{\alpha} \phi_{\alpha} . \quad (3.36)$$

Die Gewichtungsfaktoren ω_{α} wurden eingeführt, um später ein Pairingschema berücksichtigen zu können.

Für die Berechnungen von Kernen werden in der Regel nur stationäre Zustände betrachtet. Zusätzlich wird vorausgesetzt, dass Protonen- und Neutronenzustände nicht miteinander mischen. Durch die Annahme von Stationarität verschwinden alle Zeitableitungen und räumlichen Komponenten der Dichten, welche die Quellen der Felder darstellen, so dass auch die zugehörigen Felder verschwinden. Dies führt zu einer wesentlichen Vereinfachung des Problems, da nur noch σ , ω_0 , ρ_{00} und A_0 als nicht verschwindende Felder übrig bleiben. Des Weiteren wird noch die Zeitabhängigkeit der Wellenfunktionen separiert:

$$\phi_{\alpha}(x^{\mu}) = \phi_{\alpha}(\mathbf{r}) e^{i\epsilon_{\alpha} t} , \quad (3.37)$$

wobei ϵ_{α} die Einteilchenenergie ist. Mit den vorgestellten Näherungen ist es nun möglich aus den Euler-Lagrange-Gleichungen Glg. (3.33) die Bewegungsgleichungen zu bestimmen.

3.3.3 Die Bewegungsgleichungen

Für die Nukleonen findet man eine Dirac-Gleichung, in der die Wechselwirkungen mit den Feldern enthalten sind:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha} \gamma_0 \phi_{\alpha} = & (-i \vec{\gamma} \cdot \nabla + m_N + g_{\sigma} \sigma + g_{\omega} \omega_0 \gamma_0 \\ & + \frac{1}{2} g_{\rho} \rho_{00} \gamma_0 \tau_0 + \frac{1}{2} e A_0 \gamma_0 (1 + \tau_0)) \phi_{\alpha} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Für die Felder bestimmt man folgende Gleichungen:

$$-(\Delta + m_\sigma^2)\sigma + U'(\sigma) = -g_\sigma \bar{\psi}\psi \quad (3.39)$$

$$(-\Delta + m_\omega^2)\omega_0 + U'(\omega_0) = g_\omega \bar{\psi}\gamma_0\psi \quad (3.40)$$

$$(-\Delta + m_\rho^2)\rho_{00} = \frac{1}{2}g_\rho \bar{\psi}\tau_0\gamma_0\psi \quad (3.41)$$

$$-\Delta A_0 = \frac{1}{2}e\bar{\psi}(1 + \tau_3)\gamma_0\psi. \quad (3.42)$$

Unter den beschriebenen, teilweise restriktiven Näherungen ergibt sich ein selbstkonsistentes Feldproblem ähnlich dem des nichtrelativistischen Hartree-Fock-Verfahrens. Wie bei der Methode der Skyrme-Kraft können diese Gleichungen aber auch als Definition eines sehr erfolgreichen effektiven Modells aufgefasst werden.

Je nach Annahme werden für die Lagrangedichte verschiedene Mesonenfelder und unterschiedliche Formen der Kopplung verwendet. Als freie Parameter treten dann neben der Nukleonenmasse die entsprechenden Massen und Kopplungskonstanten der Mesonen auf, die auf ähnliche Weise wie bei den nichtrelativistischen Kernmodellen aus bekannten Eigenschaften von Kernmaterie und Kernen bestimmt werden.

3.3.4 Verwendete Parametrisierungen

Die effektiven Lagrangedichten der Parametersätze NL3, NL-Z2 und TMA beinhalten den Austausch skalarer, vektorieller und isovektorieller Mesonen. Bei NL3 und NL-Z2 wird die skalare Selbstwechselwirkung des σ -Mesons miteinbezogen, bei TMA zusätzlich noch die nichtlineare vektorielle Selbstwechselwirkung des ω -Mesons. **NL3** wurde unter der besonderen Berücksichtigung von Isospin-Effekten entwickelt. Hierfür wurde der Parametersatz an den Bindungsenergien und den rms-Radien der Ladungs- und Neutronendichten der Kerne ^{16}O , ^{40}Ca , ^{48}Ca , ^{58}Ni , ^{90}Cr , ^{116}Sn , ^{124}Sn , ^{132}Sn , ^{208}Pb und ^{214}Pb angefitet. Des Weiteren wurden die Kernmaterie-Eigenschaften Bindungsenergie pro Nukleon, Sättigungsdichte, nukleare Inkompressibilität und Symmetrieenergie berücksichtigt. Auch hier wird die Paar-Kraft in der üblichen Form einer δ -Kraft über das BCS-Schema implementiert. Die zugehörige Massentabelle erstreckt sich für alle gg-Kerne mit $Z = 20$ bis $Z = 130$ weit über die Neutronen-Dripline hinaus, wobei nur sphärische Geometrie der Kerne berücksichtigt wurde.

Des Weiteren wurde in dieser Arbeit die mit **NL3def** bezeichnete Massentabelle von Lalazissis [LRR99] verwendet, in der ebenfalls für den Parametersatz NL3 1315 gg-Kerne mit $10 \leq Z \leq 98$, aber unter Hinzunahme axialsymmetrischer Deformationen, bis zum Erreichen der Dripline berechnet wurden. Hier wurden für das BCS-Paarungs-Schema konstante Paarungs-Gaps angesetzt. NL3def ermöglicht den direkten Vergleich mit den ebenfalls deformiert berechneten nichtrelativistischen Modellen und der FRDM-Massentabelle.

Beim Parametersatz **NL-Z2** wurde eine Korrektur der unerwünschten Schwerpunkts-Bewegung durchgeführt, indem der volle mikroskopische Korrekturfaktor

$$E_{c.m.} = \frac{\langle \hat{P}_{c.m.}^2 \rangle}{2M} \quad (3.43)$$

in perturbativer Form subtrahiert wurde. Bei NL-Z2 wurden die freien Parameter aus den Bindungsenergien, Diffraktionsradien, Oberflächendicken, rms-Radien der Ladungsdichten und der Spin-Bahn-Aufspaltungen 17 verschiedener Kerne bestimmt. Die zugehörige Massentabelle wurde für gg-Kerne von $Z = 26$ bis $Z = 140$ bis zum Erreichen der Dripline unter der Annahme sphärischer Geometrie berechnet. Hierbei gibt es, wie in Abb. A.1 erkennbar, eine kleine Lücke zwischen den Audi-Wapstra-Kernen und denen von NL-Z2, so dass gewisse Abweichungen von der ermittelten Sequenz nicht auszuschließen sind. Da die Massentabelle außerdem erst bei $Z = 26$ beginnt, könnten bei der Berechnung der Sequenz des Weiteren Kerne mit geringerer Ladung übergangen worden sein.

Die Parametrisierung **TMA** stellt den Nachfolger der beiden Parametersätze TM1 und TM2 [ST94] dar, die wie TMA beide die vektorielle Selbstwechselwirkung des ω -Mesons beinhalten. Die Notwendigkeit der Hinzunahme dieser Selbstwechselwirkung wird durch relativistische Brueckner-Hartree-Fock-Rechnungen motiviert: Die vektorielle Selbstenergie des Nukleons entspricht dabei Vielteilchen-Effekten höherer Ordnung, die über die übliche relativistische Mean-Field-Beschreibung hinausgehen. Die Parameter von TM1 wurden an den Bindungsenergien und Ladungsradien von Kernen mit Protonenzahl größer oder gleich 20, und die von TM2 an leichteren Kernen mit Protonenzahl kleiner als 20 angefügt. Anstatt zwei verschiedene Parametersätze für die Beschreibung leichter und schwer Kerne zu konstruieren, wurden bei TMA massenzahl-abhängige Fit-Parameter verwendet. Die Massentabelle zu TMA berücksichtigt wie NL3def axialsymmetrische Deformationen und umfasst 6969 Kerne mit $Z, N \geq 8$ und $Z \leq 100$ von der Protonen- bis zur Neutronen-Dripline.

Das relativistische Punktkopplungsmodell **PCF1** ist ebenfalls ein Mean-Field-Modell, allerdings wechseln hier die Nukleonen nicht über mittlere Mesonen- sondern über mittlere Nukleonenfelder. Die Nukleonenfelder sind dabei von verschwindender Reichweite (Punktkopplung oder Kontaktwechselwirkung), und werden zusammen mit Ableitungstermen verwendet, die den Meson-Austausch endlicher Reichweite simulieren. PCF1 verwendet dabei vier-, sechs- und acht-Fermionen-Punktkopplungs-Terme in der effektiven Lagrangedichte, die jeweils zwei-, drei- und vier-Körper-Wechselwirkungen repräsentieren. Die Parameter von PCF1 wurden dabei auf ähnliche Weise wie bei NL-Z2 gewonnen. Die berechnete Massentabelle sphärischer gg-Kerne deckt den gleichen Bereich wie NL-Z2 ab, und auch hier gibt es eine kleine Lücke zu den experimentellen Daten, mit den bei NL-Z2 angesprochenen Konsequenzen.

In dem mit **Chiral** bezeichneten Modell wird ein chiraler effektiver Lagrangian verwendet, der aus der nichtlinearen Realisierung der chiralen $SU(3) \times SU(3)$ Symmetrie, motiviert aus der Quantenchromodynamik (QCD), konstruiert wurde. Mit dem $SU(3)$ chiralen Modell können sowohl Kernmaterie als auch Eigenschaften von Kernen, Hyperkerne und Neutronensterne [HZP⁺00, SZ03] beschrieben werden. Hierbei wird sowohl das volle Nonet der skalaren, pseudoskalaren und Vektor-Mesonen miteinbezogen, als auch ein Dilaton-Feld und das Baryonen-Oktett in der Mean-Field- und No-Sea-Näherung. Die Hadron-, Meson- und Baryon-Massen sind keine zusätzlich benötigten Eingabe-Parameter, sondern werden direkt aus den Erwartungswerten der skalaren Felder des effektiven Lagrangian (spontane chirale Symmetriebrechung neben expliziter Symmetriebrechung) generiert, wie es die Eigenschaften der QCD vorgeben. Wie auch bei den Modellen NL-Z2 und PCF1 wird die Paarkraft in Form des BCS-Schemas implementiert. Die generierte Massentabelle sphärischer gg-Kerne erstreckt sich von $Z = 16$ bis $Z = 100$ bis zur Neutronen-Dripline.

Für die relativistischen Modelle NL3, NL-Z2, PCF1 und Chiral wurden zusätzliche sphärische Massentabellen ohne Verwendung der Paarkraft erzeugt, um die Auswirkungen des Pairings direkt untersuchen zu können. Die Rechnungen für Massentabellen mit Paarkraft werden durch ein angehängtes „p“ gekennzeichnet, die ohne Paarungsterm durch „np“.

Die beiden einzigen deformiert berechneten relativistischen Massentabellen TMA und NL3def wurden für den Vergleich mit den nichtrelativistischen und Tröpfchen-Modellen ausgewählt.

Kapitel 4

Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse, wie z. B. die Zustandsgleichung und die Sequenz der Kerne in der äußeren Kruste nicht akkretierender kalter Neutronensterne, aus der Anwendung des erweiterten BPS-Modells vorgestellt. Hierbei wurden mit den unterschiedlichen Kernmodellen aus Kapitel 3 die Eigenschaften und Zusammensetzung der äußeren Kruste bestimmt. Die theoretischen Kernmodelle sagen für die einzelnen Nuklide verschiedene Bindungsenergien voraus, so dass bei gegebener Dichte für unterschiedliche Kernmodelle auch unterschiedliche Nuklide als Grundzustand zu erwarten sind, was wiederum die Zustandsgleichung beeinflusst.

Da ein großer Teil der Massen der Kerne, die in der äußeren Kruste auftreten, bereits präzise aus dem Experiment bekannt sind, werden in dieser Rechnung bevorzugt die experimentellen Daten aus der atomaren Massentabelle von Audi, Wapstra und Thibault [AWT03] verwendet. Auf die geschätzten, nicht experimentellen Daten dieser Tabelle wird allerdings verzichtet. Nur wenn ein Kern nicht in dieser Tabelle vorhanden ist, wird auf das jeweilige theoretische Modell zurückgegriffen. Dies betrifft insbesondere die Kerne im Bereich der Neutronen-Dripline, da diese aufgrund der schwierigen Erzeugung und der geringen Lebensdauer nur eingeschränkt experimentell untersucht werden können. Für die mit dem Tröpfchen-Modell von Myers und Swiatecki [MS66] berechnete, im Folgenden mit „BPS“ bezeichnete, Sequenz, wurden jedoch keinerlei experimentellen Daten aus [AWT03] benutzt, um die ursprüngliche Sequenz aus [BPS71] zu reproduzieren.

Mit den neuesten theoretischen Kernmodellen und experimentellen Daten werden somit die Arbeiten von [BPS71, HZD89, HP94] aktualisiert. Außerdem sollen in diesem Kapitel die direkten Eigenschaften der einzelnen theoretischen Kernmodelle, in Form der Neutronen-Driplines, untersucht und miteinander verglichen werden.

4.0.5 Definition und Bedeutung der Driplines

In dem hier betrachteten Kontext bezeichnet man als die Neutronen-Dripline eines Kernmodells die Linie der letzten Kerne, die eine positive zwei-Neutronen-Separationsenergie besitzen:

$$E_{2ns} = W_N(A, Z) - W_N(A - 2, Z) - 2m_n > 0 . \quad (4.1)$$

Die zwei-Neutronen-Separationsenergie ist die Energie, die geleistet werden muss, um zwei Neutronen aus dem Kern zu entfernen; unter der Voraussetzung, dass der zugehörige Kern $(A - 2; Z)$ in dem jeweiligen Kernmodell überhaupt existiert.

Die Lage und Position der Neutronen-Driplines ist für diese Arbeit von besonderem Interesse, da nur Nuklide innerhalb der Dripline in der äußeren Kruste existieren können. Läge ein Kern außerhalb der Dripline, wäre dieser trotz β -Gleichgewicht und großen Elektronendichten instabil gegenüber der Emission eines Paares von Neutronen, und kann somit keinen stabilen Grundzustand darstellen. Die Neutronen-Driplines sind eng mit der Schalenstruktur der Kernmodelle verknüpft, an ihnen werden somit grundlegende Eigenschaften der Kernmodelle sichtbar.

Erreichen der Dripline

Es kann sogar gezeigt werden, dass der letzte Kern einer Sequenz (A_f, Z_f) immer direkt auf der Dripline liegen muss: Die Sequenz endet bei

$$\mu_b = m_n . \quad (4.2)$$

Vernachlässigt man die Beiträge der Erweiterungen zum baryochemischen Potential, so erhält man mit Glg. (2.28):

$$\mu_b \approx \frac{1}{A_f} \left(W_N(A_f, Z_f) + \frac{4}{3}W_L + Z_f\mu_e \right) . \quad (4.3)$$

Für das benachbarte Isotop $(A_f + 2, Z_f)$ findet man wegen der identischen Protonenzahlen bei gleichem Druck dasselbe elektrochemische Potential wie für (A_f, Z_f) (siehe Abschnitt 2.1.5):

$$\mu_e = \mu'_e . \quad (4.4)$$

Da der Kern (A_f, Z_f) den Grundzustand darstellt, muss das baryochemische Potential des Kerns $(A_f + 2, Z_f)$ größer als die Neutronenmasse sein:

$$\mu'_b \approx \frac{1}{A_f + 2} \left(W_N(A_f + 2, Z_f) + \frac{4}{3}W_L + Z_f\mu_e \right) > m_n \quad (4.5)$$

$$\Rightarrow W_N(A_f + 2, Z_f) > A_fm_n - \frac{4}{3}W_L - Z_f\mu_e + 2m_n . \quad (4.6)$$

Mit Glg. (4.2) und (4.3) folgt:

$$\Rightarrow W_N(A_f + 2, Z_f) > W_N(A_f, Z_f) + 2m_n, \quad (4.7)$$

was gerade der Definition der Dripline (Glg. (4.1)) entspricht.

4.1 Die Zustandsgleichung

Abb. 4.1 zeigt die Zustandsgleichungen einer Auswahl der unterschiedlichen Kernmodelle, die jeweiligen Grundzustandskerne sind ebenfalls angegeben. Zunächst ist ^{56}Fe am energetisch günstigsten, da es das am stärksten gebundene Element ist, und andere Energiebeiträge, wie z. B. die Gitterenergie, bei diesen geringen Dichten gegenüber der Masse des Kerns eine untergeordnete Rolle spielen. Dies ändert sich bei einer Dichte von $\sim 10^7 \text{ g/cm}^3$, bei der die Elektronen beginnen relativistisch zu werden. Bei $\rho \simeq 2 \cdot 10^7 \text{ g/cm}^3$ entspricht der Fermi-Impuls der Elektronen gerade ihrer Masse. Nur wenig früher, bei $\rho \simeq 8 \cdot 10^6 \text{ g/cm}^3$ endet der Bereich der äußeren Kruste, der aus Eisen aufgebaut ist. Nun stellt ^{62}Ni den Grundzustand dar, es folgen

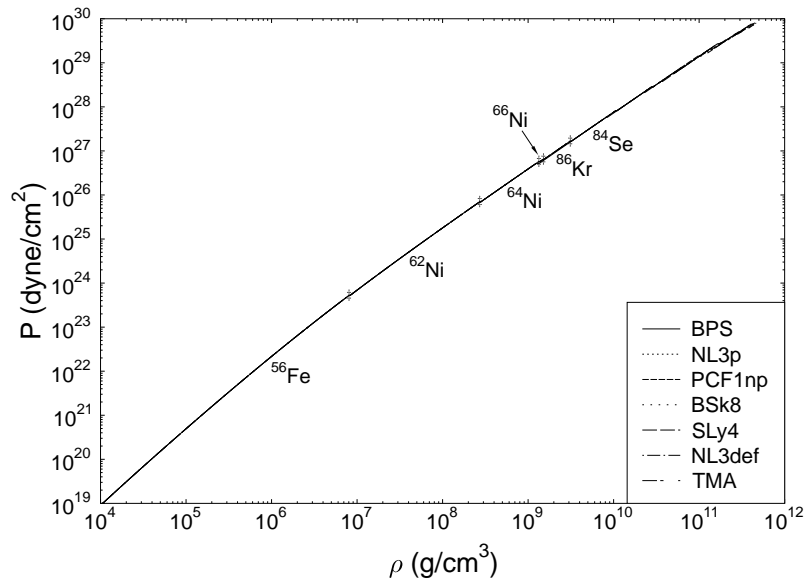


Abbildung 4.1: Die mit dem BPS-Modell und den Bindungsenergien der verschiedenen Kernmodelle berechnete Zustandsgleichung (d. h. der Druck P als Funktion der Massendichte ρ) und die jeweiligen Grundzustandskerne bis zum letzten gemeinsamen Kern aller Modelle (außer BPS, siehe Text) aus den Audi-Wapstra-Daten, ^{84}Se . NL3p: Parametersatz NL3, sphärische Rechnung mit Pairing; PCF1np: Satz PCF1 ohne Pairing; NL3def: Satz NL3 in deformierter Rechnung.

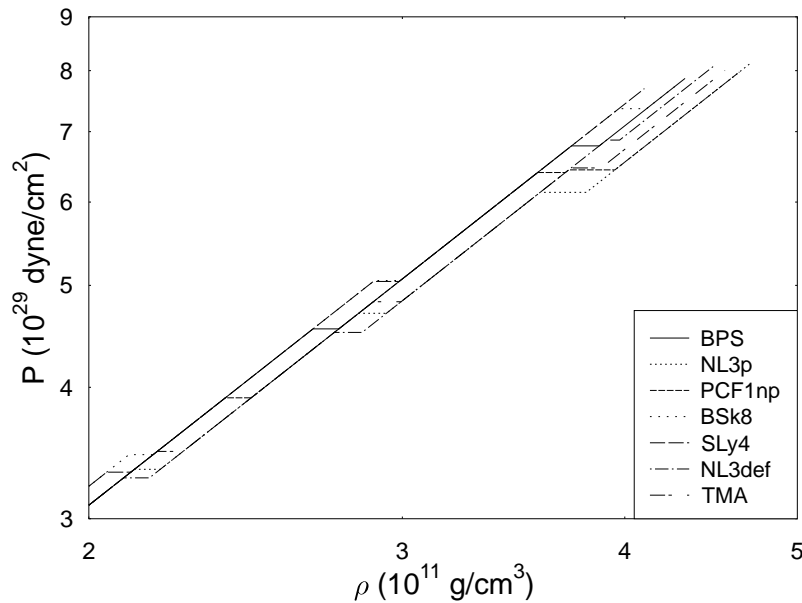


Abbildung 4.2: Wie Abb. 4.1, nun für den Bereich hoher Dichte.

die Nickel-Isotope ^{64}Ni und ^{66}Ni . Nach dieser Isotopen-Serie springt die Sequenz zu den Kernen ^{86}Kr und ^{84}Se , die beide die magische Neutronenzahl 50 besitzen. Für geringe Dichten ist diese Sequenz der Grundzustandskerne für alle Modelle identisch, da allein Kerne aus dem gemeinsam verwendeten Audi-Wapstra-Katalog gefunden wurden, so dass auch die Zustandsgleichungen identisch sind. Eine einzige Ausnahme bildet die Rechnung BPS, bei der, wie bereits erwähnt, auf die experimentellen Daten verzichtet und ausschließlich das theoretische Tröpfchen-Modell von Myers und Swiatecki verwendet wurde. Trotzdem gibt es nur eine einzige Abweichung in dieser Sequenz: ^{66}Ni wurde bei BPS nicht als Grundzustand gefunden. Aber wie man an dem Graphen erkennen kann, hat diese Abweichung nur geringe, nicht sichtbare Auswirkungen auf die Zustandsgleichung. Ab einer Massendichte von 10^{10} g/cm^3 dringt die Sequenz in den Bereich der theoretischen Kernmodelle vor und wird nun von der jeweils verwendeten Massentabelle abhängig. Die unterschiedlichen Sequenzen ziehen unterschiedliche Zustandsgleichungen nach sich. In Abb. 4.2 wurde der Hochdichtebereich vergrößert dargestellt, so dass die Separierung der einzelnen Modelle erkennbar wird. Trotz der unterschiedlichen Sequenzen sind die Abweichungen der Zustandsgleichungen nur in der Größenordnung weniger Prozent und bleiben damit relativ gering.

In Abb. 4.2 sind auch die in Abschnitt 2.1.5 erklärten Dichtesprünge, die bei den Übergängen von einem Grundzustandskern zum nächsten auftreten, gut erkennbar. Exemplarisch sei hier zur genaueren Betrachtung der letzte Übergang der BPS-Rechnung $^{120}\text{Sr} \rightarrow ^{118}\text{Kr}$ ausgewählt. Numerisch wurde folgender Dichtesprung

ermittelt:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{3,924 \cdot 10^{11}}{3,786 \cdot 10^{11}} - 1 = 3,65 \% . \quad (4.8)$$

Mit der Abschätzung aus Glg. (2.24) erhält man:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{Z/A}{Z'/A'} - 1 = \frac{38/120}{36/118} - 1 = 3,80 \% , \quad (4.9)$$

die Näherung liefert also gute Ergebnisse.

4.1.1 Der adiabatistische Index

Eine andere Möglichkeit die Zustandsgleichung zu untersuchen, ergibt sich durch den adiabatistischen Index, der wie folgt definiert ist:

$$\Gamma = \frac{n_b}{P} \frac{\partial P}{\partial n_b} , \quad (4.10)$$

Der adiabatistische Index dient als notwendiges Stabilitätskriterium von kompakten Sternen. Diese müssen die Bedingung

$$\langle \Gamma \rangle > 4/3 + K \frac{R_S}{R} \quad (4.11)$$

für den über den Stern gemittelten adiabatistischen Index erfüllen [Cha64], wobei K eine dimensionslose Konstante der Größe ~ 1 , R den Radius des Sterns, und R_S den zugehörigen Schwarzschildradius darstellt. Der Schwarzschildradius berechnet sich aus der Gesamtmasse M des Objekts mit Hilfe der Gravitationskonstanten G zu $R_S = \frac{2GM}{c^2}$ (näheres zur Bedeutung des Schwarzschildradius folgt in Abschnitt 6.1).

Des Weiteren dient der adiabatistische Index als Maß für die Härte bzw. Steifigkeit einer Zustandsgleichung. Hier gilt die allgemeine Regel: desto steifer die Zustandsgleichung, desto größer die Masse des massivsten stabilen Neutronensterns und desto geringer dessen zentrale Energiedichte.

In Abb. 4.3 ist der adiabatistische Index als Funktion der Dichte für eine Auswahl der Kernmodelle dargestellt. An den Übergangspunkten wird der adiabatistische Index null, da der Druck über den Phasenübergang hinweg konstant bleibt. Dieses Absinken im Bereich der Phasenübergänge führt zu einer Verminderung des Mittelwertes von Γ . Die Phasenübergänge erster Ordnung verursachen somit eine Aufweichung der Zustandsgleichung. Dies ist nicht nur charakteristisch für die hier betrachteten Übergänge zwischen verschiedenen Kernsorten, sondern gilt allgemein für jede Art von Phasenübergang erster Ordnung.

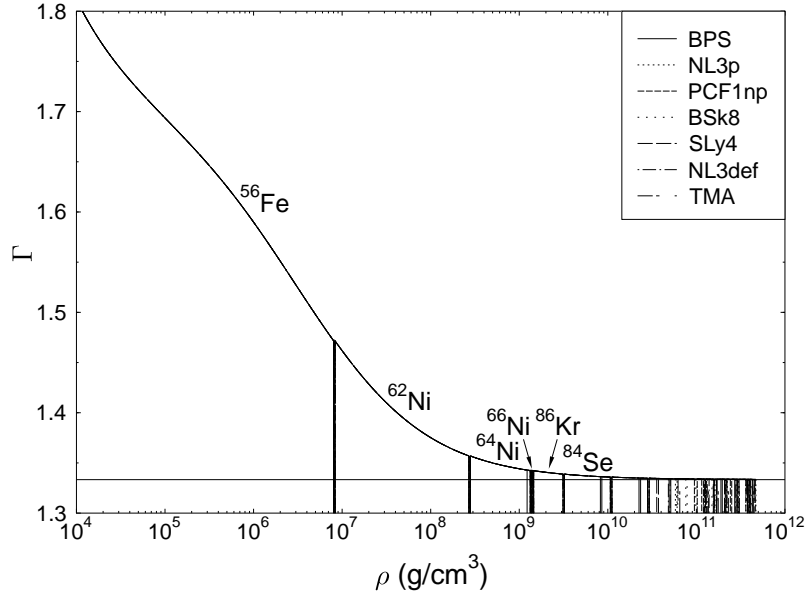


Abbildung 4.3: Der adiabatische Index Γ berechnet unter Verwendung des BPS-Modells für die gleichen Kernmodelle wie in Abb. 4.1 und 4.2. Die horizontale Linie zeigt $\Gamma = 4/3$.

Wie man sieht, gibt es keine bemerkbaren Unterschiede zwischen den einzelnen theoretischen Modellen, einzig die Übergänge bei großen Dichten finden an verschiedenen Stellen statt. Für hohe Massendichten konvergiert der adiabatische Index gegen den relativistischen Limes $\Gamma = 4/3$, ein Wert, der folgendermaßen erklärt werden kann: Der Druck des Systems wird bei großen Dichten hauptsächlich durch den Druck des Elektronengases

$$P_e = \frac{1}{3\pi^2\hbar^3} \int_0^{k_e} \frac{k^2 c^2}{E(k)} k^2 dk \quad (4.12)$$

bestimmt. Dieser wird im relativistischen Limes ($k_e \gg m_e c$, $E(k) \approx kc$) zu

$$P_e = \frac{c}{12\pi^2\hbar^3} k_e^4, \quad (4.13)$$

und mit Glg. (2.6) findet man folgenden einfachen Zusammenhang:

$$P_e \propto n_e^{4/3} \propto n_N^{4/3}, \quad (4.14)$$

aus dem direkt der Wert von $4/3$ des adiabatischen Index im relativistischen Limes folgt.

Allein allgemein-relativistische Effekte, welche durch das Verhältnis R_S/R in Glg. (4.11) repräsentiert werden, sowie das Auftreten der Phasenübergänge führen also dazu, dass auch hypothetische weiße Zwerge, die nur aus der Materie der äußeren Kruste bestünden, eine Maximalmasse besäßen, über der sie instabil werden würden.

4.2 Kernsequenzen und Driplines

In den nun folgenden Unterabschnitten werden die Sequenzen der Kerne, die bei der jeweiligen Dichte den Grundzustand darstellen, und die Neutronen-Driplines ausgewählter theoretischer Kernmodelle zunächst hinsichtlich bestimmter Gesichtspunkte untersucht, um abschließend einen allgemeinen Vergleich aller verwendeten Modelle durchzuführen.

4.2.1 Tröpfchen-Modelle

Abb. 4.4 stellt die Ergebnisse der Rechnung für das Modell FRDM in kompakter Form dar. Zum einen wird ersichtlich, welche Kerne durch die Audi-Wapstra-Daten gegeben sind und welcher Bereich durch das theoretische Kernmodell abgedeckt wird. Zum anderen wird die Sequenz der Grundzustandskerne grafisch veranschaulicht.

Magische Zahlen

Neutronen- oder Protonenzahlen bezeichnet man als magische Zahlen, wenn die entsprechenden Kerne gegenüber Kernen mit ähnlicher Massen- und Protonenzahl besonders stark gebunden sind. Experimentell findet man für Neutronen und Protonen die magischen Zahlen 2, 8, 20, 28, 50, 82 und 126. Außergewöhnlich stabil sind die doppelmagischen Kerne wie ^4He , ^{40}Ca oder ^{208}Pb , bei denen sowohl die Neutronen- als auch die Protonenzahl magisch sind. Magische Kerne besitzen eine besonders hohe Separationsenergie eines einzelnen Nukleons, Kerne mit einem zusätzlichen Nukleon hingegen eine wesentlich geringere. Dies ähnelt stark den Schalenabschlüssen der Edelgase in der Atomphysik, die auf der Drehimpulsentartung von Zuständen gleicher Hauptquantenzahl beruhen. Bei Kernen sind nur die ersten drei magischen Zahlen durch die Drehimpulsentartung erklärbar, für größere magische Zahlen werden elementare Unterschiede zwischen Kernen und Atomen deutlich. Erst unter Hinzunahme der Spin-Bahn Kopplung können alle magischen Zahlen erklärt werden. Die Spin-Bahn-Kopplung, die im Atom nur die sehr schwache Feinstruktur-Aufspaltung bewirkt, ist im Atomkern so groß, dass sie die Niveauaufspaltung erheblich beeinflusst.

Die Dripline des Modells FRDM beginnt in Abb. 4.4 bei $N = 50$, die eine bekannte magische Neutronenzahl darstellt. An dem senkrechten Verlauf der Dripline zeigt sich, dass diese Kerne im FRDM Modell eine besonders hohe Bindungsenergie aufweisen. Dies wird wiederum auch darin deutlich, dass nach der Nickel-Isotopenserie von Krypton bis Nickel eine Serie von fünf Kernen mit Neutronenzahl 50 durchlaufen wird. Wie bereits erwähnt, bewegt sich die Sequenz hierbei zunächst nur

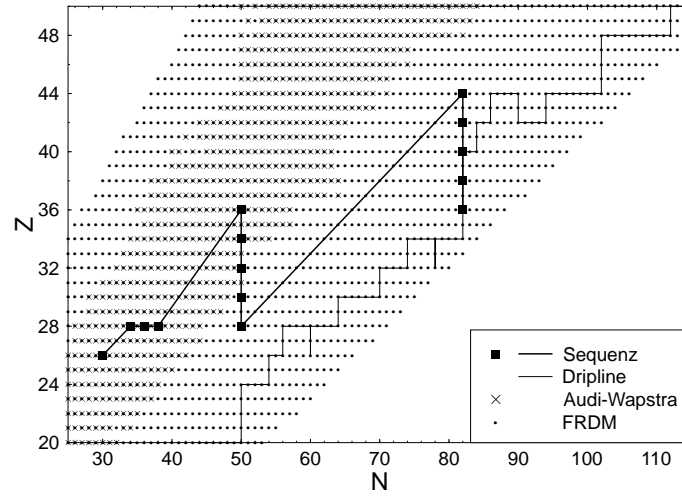


Abbildung 4.4: Nuklidkarte für das theoretische Tröpfchen-Modell FRDM, die Sequenz der Grundzustandskerne (Linie mit Symbolen) und die Neutronen-Dripline (Linie ohne Symbole). Kreuze stellen die Kerne aus der atomaren Massentabelle [AWT03] dar, Punkte alle verfügbaren Kerne der FRDM-Massentabelle.

innerhalb des Bereiches, der durch die Audi-Wapstra-Daten abgedeckt wird. Für FRDM ist ^{78}Ni , das auf ^{80}Zn folgt, der erste Kern, dessen Masse nicht mehr aus den experimentellen Daten stammt.

Es folgt ein Abschnitt, bei dem die Neutronen-Dripline weitestgehend diagonal und linear verläuft, bis die Neutronenzahl 82 erreicht wird. Bei $(N, Z) = (60, 28)$ und $(78, 34)$ gibt es allerdings jeweils erst einen Schritt zu kleinerem Z , bevor die Dripline wieder mit der Neutronenzahl anwächst. 82 ist für FRDM ebenfalls eine magische Zahl bzw. ein Schalenabschluss, erneut signalisiert durch den ausgeprägt senkrechten Verlauf der Dripline. Auch die Sequenz orientiert sich wieder entlang dieser magischen Zahl, wobei sogar die letzten drei Kerne direkt auf der Dripline liegen. Bei $Z = 44$ und 48 kann man abgeschlossene Protonenschalen erkennen, die von der Sequenz allerdings nicht mehr erreicht werden.

4.2.2 Nichtrelativistische Modelle

In Abb. 4.5 werden zunächst die Ergebnisse für die nichtrelativistischen Massentabellen, die von der BRUSLIB-Kollaboration stammen, betrachtet. Es sind die Sequenzen und Driplines von SkSC18, das die ETFSI-Methode verwendet, von MSk7, einer Hartree-Fock-Rechnung mit BCS-Pairing, und von BSk8, einer vollen Skyrme-HFB-Rechnung, dargestellt. Betrachtet man die Driplines, so sind nur geringe Unterschiede zwischen den einzelnen Modellen erkennbar, insgesamt ist der Verlauf rela-

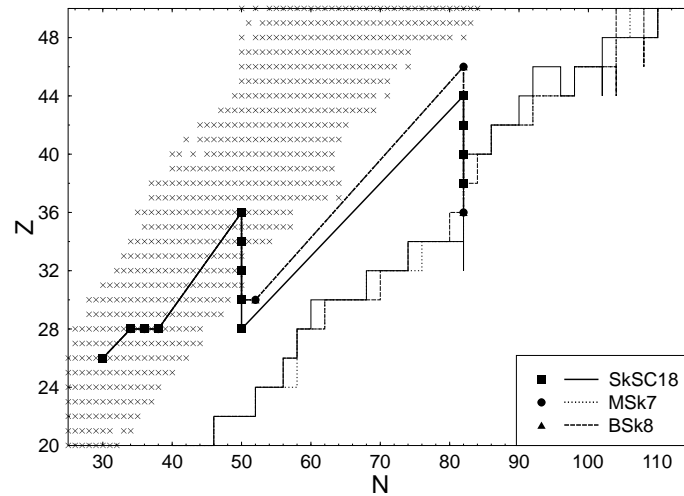


Abbildung 4.5: Nuklidkarte verschiedener deformierter, nichtrelativistischer Modelle von BRUSLIB und deren Neutronen-Driplines. Kreuze stellen die Kerne aus der atomaren Massentabelle dar [AWT03]. Linien mit Symbolen zeigen die Sequenz der Grundzustandskerne in der äußeren Kruste unter Verwendung der verschiedenen Massentabellen.

tiv linear. Die Neutronenzahl 82 könnte man als magische Zahl der Modelle SkSC18 und BSk8 interpretieren, ansonsten sind keine ausgeprägten Merkmale der Driplines vorhanden. An den identischen Sequenzen von BSk8 und MSk7 und der ähnlichen Sequenz von SkSC18 bestätigt sich das Bild, dass die Modelle von BRUSLIB alle sehr ähnliche Massentabellen liefern. Allerdings fällt bei den Modellen BSk8 und MSk7 auf, dass nach dem letzten Audi-Wapstra-Kern, ^{80}Zn , kein Kern mit Neutronenzahl 50 sondern ^{82}Zn besetzt wird. Die Neutronenzahl 50 scheint in diesen beiden Modellen nicht besonders stark gebunden zu sein, was auch durch den waagrechten Verlauf der Driplines in diesem Bereich bestätigt wird. Anschließend findet man ab ^{126}Ru identische Sequenzen mit $N = 82$, wobei SkSC18 mit ^{120}Sr den Neutronen-Drip bereits ein Isoton (Kerne mit gleicher Neutronenzahl) früher als die beiden anderen Modelle erreicht.

Abb. 4.6 zeigt eine Auswahl der nichtrelativistischen Modelle von Dobaczewski et al. SLy4 und SkP sind volle Skyrme-HFB-Rechnungen, SkM* hingegen verwendet die BCS-Näherung. Die Neutronen-Driplines der drei Modelle sind sehr unterschiedlich: Beim Parametersatz SLy4 ist die Dripline ähnlich wie die der Modelle aus Abb. 4.5, SkP liegt um $\Delta Z = 0 - 4$ nach unten verschoben, SkM* erneut bei um $\Delta Z = 0 - 4$ kleineren Werten von Z verglichen zu SkP. Die Dripline von SkP verläuft relativ linear, die von SLy4 weist deutlichere Schalenabschlüsse auf und die von SkM* ist relativ sprunghaft. Bei SkM* wandert die Dripline des Weiteren in der Gegend um $(N, Z) = (100, 42)$ zunächst drei Kerne weiter zu kleinerem Z und N ,

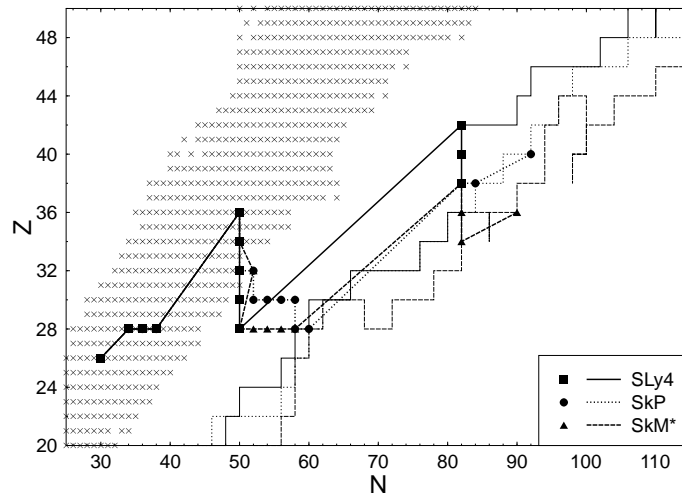


Abbildung 4.6: Wie Abb. 4.5, nun für nichtrelativistische Modelle von Dobaczewski et al.

um erst dann wieder anzusteigen. Ein ähnliches Verhalten ist auch für verschiedene Modelle von Dobaczewski in Abb. 4.5 bei $N = 104$ und $N = 108$ zu erkennen, allerdings nicht so ausgeprägt wie hier für SkM*.

Folgende magische Protonenzahlen sind erkennbar: 32 und 46 für SLy4, 22 und 32 für SkP, 30 (und evtl. 44) für SkM*. Für SLy4 ist 82 an der Dripline deutlich als neutronen-magische Zahl zu erkennen, für SkM* nur gering und für SkP überhaupt nicht. So ist die Sequenz von SLy4 ähnlich zu denen aus Abb. 4.5, und folgt ebenfalls den magischen Zahlen $N = 50$ und $N = 82$. Die beiden Kernmodelle SkM* und SkP zeigen hingegen ein ganz anderes Verhalten. Bei ihnen sind ausgeprägte Isotopen-Sequenzen zu erkennen. SkP verläuft zunächst entlang $Z = 30$, und springt dann zu zwei Strontium-Isotopen mit $Z = 38$, um bei ^{132}Zr zu enden. Bei SkM* ist $Z = 28$ eine noch ausgeprägtere magische Zahl, anschließend wird hier allerdings auch $N = 82$ mehrmals besetzt. Entsprechend den Driplines liegen auch die Sequenzen in Z zueinander verschoben, SkP bei geringerem Z als SLy4, und SkM* um $\Delta Z = 0 - 4$ unter SkP.

Die nichtrelativistischen Modelle zeigen, dass nicht die Details der Näherung, wie ETFSI, BCS oder HFB, für die Lage der Dripline und die Sequenz der Kerne entscheidend sind, sondern vielmehr die Art der Anpassung der freien Parameter. Die Kernmodelle von Dobaczewski wurden an unterschiedlichen Sätzen weniger ausgewählter Observablen angepasst und zeigen große Unterschiede in der Sequenz. Die BRUSLIB-Rechnungen wurden hingegen auf gleiche Weise an den Bindungsenergien mehrerer tausend Kerne gefittet und liefern nahezu identische Ergebnisse. Sogar im Vergleich mit dem Tröpfchen-Modell FRDM bleibt diese Schlussfolgerung bestehen. Auch bei FRDM wurden die freien Parameter hauptsächlich an einer großen

Anzahl bekannter Kernmassen angepasst, und die resultierende Sequenz und Dripline stimmt sehr gut mit den BRUSLIB-Modellen überein. Diese Konsistenz, trotz der unterschiedlichen zugrunde liegenden Theorien und verwendeten Näherungen, deutet auch auf die hohe Entwicklung und Qualität der theoretischen Kernmodelle hin.

4.2.3 Relativistische Modelle

Deformationen

In Abb. 4.7 können die beiden deformierten relativistischen Rechnungen NL3def und TMA mit dem sphärischen relativistischen Modell NL3p verglichen werden. Die Neutronen-Driplines liegen hier noch weiter auseinander als in Abb. 4.6. NL3def ist bei relativ großen Werten von Z lokalisiert, TMA hingegen ähnelt von der Lage her den Modellen von BRUSLIB. Die Driplines von NL3 und TMA verlaufen relativ linear und parallel zueinander, nur um $Z = 28$ und $Z = 42$ gibt es für das letzte stabile Isotop eines Elements größere Unterschiede. Schalenabschlüsse lassen sich an der Dripline von NL3def nur für die Protonenzahl $Z = 30$ und 44, bei TMA für $Z = 26$ und 40 und die Neutronenzahl $N = 82$ ablesen.

NL3p zeigt die erste Dripline und Sequenz einer nicht deformiert berechneten Massentabelle. Die Dripline von NL3p verläuft in Stufen, es sind eine Vielzahl von „Plateaus“ und „Wänden“ erkennbar, die deutliche Schalenabschlüsse bei $Z = 32, 38$

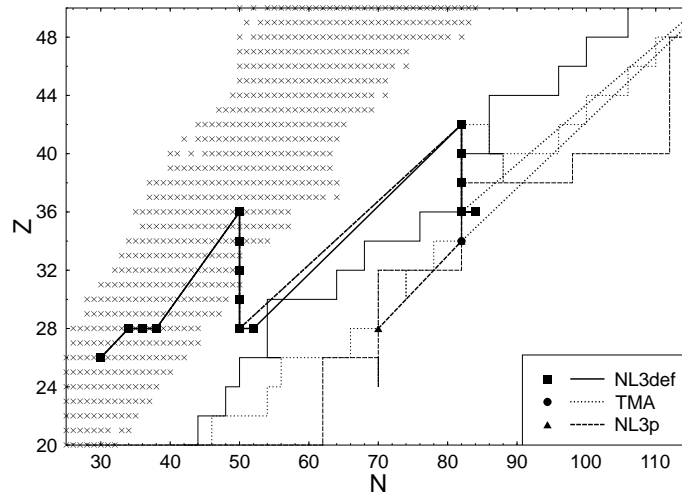


Abbildung 4.7: Die Neutronen-Driplines und Sequenzen der zwei relativistischen Modelle NL3def und TMA in deformierter Rechnung, und des sphärischen Modells NL3p (NL3 mit Pairing). Symbolisierung wie in Abb. 4.5.

und 40 und $N = 62, 70, 82$ und 112 signalisieren. Die magischen Zahlen sind für die nicht deformierte Rechnung insgesamt wesentlich deutlicher ausgeprägt. Des Weiteren fällt auf, dass die Dripline mit bis zu $\Delta Z = 10$ unter der von NL3def bei sehr kleinen Werten von Z liegt.

Die Sequenzen stimmen weitestgehend mit den bisher betrachteten überein. Das heißt, dass alle drei verschiedenen Typen von theoretischen Kernmodellen, Tröpfchen-Modelle, nichtrelativistische und relativistische Modelle, je nach verwendeter Parametrisierung dazu in der Lage sind ähnliche Ergebnisse zu liefern.

Außer Kernen mit den Neutronenzahlen 50 und 82 gibt es für die drei relativistischen Massentabellen nur folgende Grundzustandskerne: Bei NL3def wird nach der $N=50$ -Isotonen-Serie noch ^{80}Ni besetzt, die Sequenz endet bei ^{120}Kr , ein Nuklid mit Neutronenzahl 84. Bei TMA taucht ein ungewöhnlich schweres Element, $^{180}_{54}\text{Xe}$, mit der magischen Neutronenzahl $N = 126$ auf. Doch auch bei NL3p gibt es trotz der deutlich abweichenden Dripline mit ^{98}Ni nur einen „ungewöhnlichen“ Kern. Wie ist das zu erklären?

Kerne mit abgeschlossenen Schalen sind kugelsymmetrisch und nicht deformiert. Da in der äußeren Kruste wegen den hohen Bindungsenergien fast ausschließlich eben solche Kerne zu finden sind, spielen hier Deformationen nur eine untergeordnete Rolle. Weit weg von abgeschlossenen (d. h. bei halbgefüllten) Schalen polarisieren die dort befindlichen Nukleonen den Kernrumpf. Das mittlere Kernpotential ist in diesem Fall nicht mehr kugelsymmetrisch und die Kerne werden deformiert. Diese Deformationen führen zu einer Abschwächung der Schaleneffekte, welche die Glättung der Dripline zur Folge hat.

Effekt des Pairings

In Abb. 4.8 sind die Kernsequenzen und Driplines für die vier relativistischen Modelle in sphärischer Rechnung mit und ohne Pairing dargestellt. Sofort fällt der stufenförmige Verlauf der Dripline, der schon bei NL3p festgestellt wurde, auch bei den anderen drei Modellen mit Pairing aber ohne Deformationen ins Auge. Hierbei ist zu beachten, dass die Massentabellen von NL-Z2 und PCF1 erst bei $Z = 26$ beginnen. Des Weiteren findet man kleine „Halbinseln“, Bereiche bei denen die Protonenzahl nicht kontinuierlich mit der Neutronenzahl wächst, sondern zunächst kleiner wird, um dann wieder anzusteigen; besonders ausgeprägt z. B. bei NL-Z2 für $N = 90 - 100$ und $Z = 32$. Der Effekt des Pairings auf die Dripline ist eher von untergeordneter Rolle. Die Lage und Position bleiben unverändert, es ist nur eine Glättung durch Hinzunahme des Pairings festzustellen. Verglichen mit den nichtrelativistischen Modellen liegen die Driplines der Modelle NL3, NL-Z2 und PCF1 besonders im Bereich von $N = 80 - 110$ bei sehr niedrigen Werten von Z . Das Chirale Modell zeigt ein anderes Verhalten, hier verläuft die Dripline bei sehr großen Werten von Z nahe an

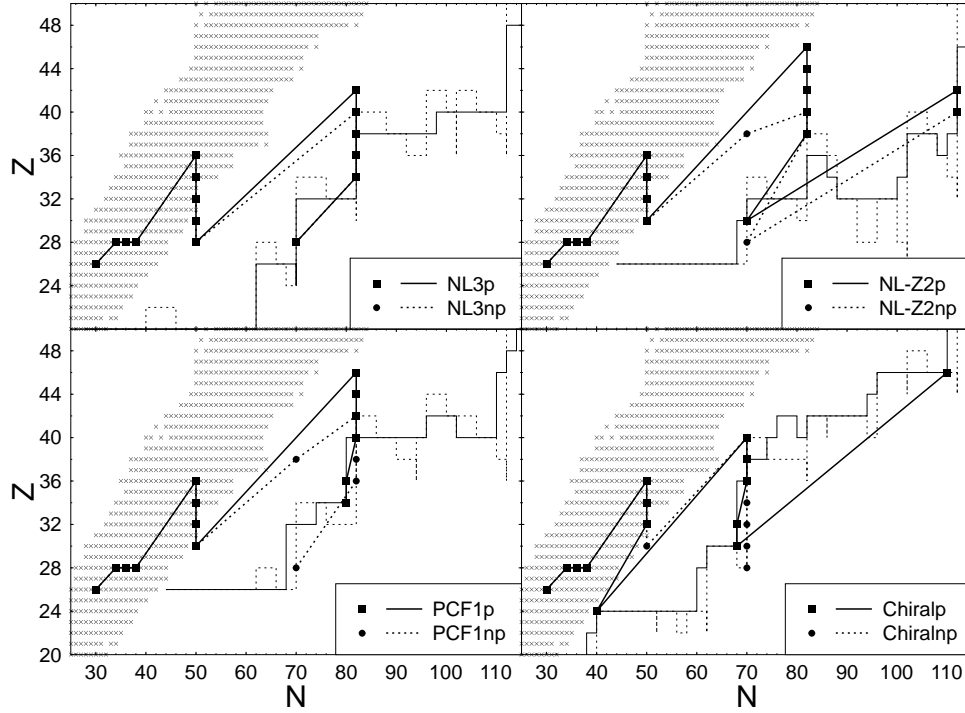


Abbildung 4.8: Nuklidkarten der verschiedenen sphärischen relativistischen Modelle und deren Neutronen-Driplines. Durchgezogene Linien stehen für Kernmodelle mit Pairing, gestrichelte ohne Pairing. Die Kreuze stellen die Kerne aus der atomaren Massentabelle [AWT03] dar. Linien mit Symbolen zeigen die Sequenz der Grundzustandskerne in der äußeren Kruste unter Verwendung der verschiedenen Massentabellen.

den Audi-Wapstra-Daten.

$Z = 32$ und $N = 68$ und 112 können als magische Zahlen für das Modell NL-Z2p an der Dripline abgelesen werden, für NL-Z2np (ohne Pairing) $N = 70, 82, 102$ und 112 . In der Sequenz findet man neben $N = 50$ und 82 einen bzw. zwei Kerne mit Neutronenzahl 70 , und für beide Rechnungen jeweils einen relativ schweren Kern bei $N = 112$. Die magischen Neutronenzahlen von NL3np sind dieselben wie bei NL3p: $62, 70, 82$ und 112 , magische Protonenzahlen können nicht ausgemacht werden. Bei PCF1p gibt es einen senkrechten bzw. waagrechten Verlauf der Dripline bei $N = 68, 80$ und 110 , bzw. $Z = 40$. Bei PCF1np sind die Neutronen-magischen Zahlen jeweils um $N=2$ verschoben: $N = 70, 82$ und 112 . Dieses Verhalten ist auch in der Sequenz wiederzufinden, die sich bei PCF1p nach $N = 82$ bei $N = 80$ fortsetzt. Bei PCF1np tauchen stattdessen nur $N = 82$ Isotone auf. Dafür werden bei PCF1np auch wieder zwei Kerne mit $N = 70$ gefunden. Bei dem chiralen Modell mit Pairing sind $Z = 24, 42$ und 46 , und $N = 60, 68$ und 110 magische Zahlen, ohne Pairing $Z = 24$ und $N = 62, 70$ und 112 . Die Sequenz von Chiralnp besteht

nur aus Kernen mit $N = 50$ und der ungewöhnlichen magischen Zahl $N = 70$, die in diesem Modell stark ausgeprägt ist. Bei Chiralp kommt schon nach ^{82}Ge mit $^{64}_{24}\text{Cr}$ ein Kern aus der theoretischen Massentabelle, der bereits auf der Dripline liegt und auch noch besonders leicht ist. Dies ist der einzige Fall, dass ein Kern mit geringerer Ladungszahl Z als 26 gefunden wurde. Es folgen Nuklide mit $N = 70$ und 68, bis die Sequenz mit ^{156}Pd endet. Wie auch die Dripline, liegt auch die Sequenz bei sehr großen Werten von Z . Die ungewöhnliche magische Zahl 70 könnte mit der Hinzunahme von Tensor-Termen, die in den anderen Modellen fehlen, in Verbindung stehen. Genau wie bei PCF1 führt das Pairing zu einer Verschiebung der Dripline und zu einem Aufsplitten der Sequenz, für PCF1 bei 80/82, für Chiral bei 68/70. Durch das Pairing werden neue Energieniveaus erzeugt, die bevorzugt besetzt werden. Dieses „Ausschmieren“ der Energie-Niveaus führt neben dem Aufsplitten der Sequenz auch zur Glättung der Dripline.

4.2.4 Neutronen-Driplines

In diesem Unterabschnitt sollen die bisher noch nicht betrachteten Driplines vorgestellt und abschließende Vergleiche zwischen den unterschiedlichen Gruppen theoretischer Modelle durchgeführt werden. Hierzu sind in Abb. 4.9 die Driplines aller verwendeten Modelle dargestellt.

Deformationen

Vergleicht man die Driplines sphärischer Kerne (in Abb. 4.9 links oben) mit denen aller deformierter, sieht man bei den deformierten Berechnungen einen steileren und nahezu linearen Verlauf der Dripline. Somit bestätigt sich, was im detaillierten Vergleich von NL3p mit TMA und NL3def bereits festgestellt wurde. Nicht deformierte Rechnungen zeigen einen stufenförmigen Verlauf der Dripline, der auf eine Überbetonung der Schalenabschlüsse hindeutet. Die Hinzunahme des zusätzlichen Freiheitsgrades der Deformation führt zu einer Abschwächung der Schaleneffekte, die Dripline verläuft wesentlich linearer. Insgesamt zeigen die deformierten Rechnungen eine gute Übereinstimmung untereinander bezüglich der Dripline. Bei den sphärischen Modellen findet man stattdessen ausgeprägtere Unterschiede zwischen den einzelnen Modellen, es ergibt sich ein weniger konsistentes Bild. Abgesehen von dem chiralen Modell liegen die Driplines der sphärischen Rechnungen oft bei kleineren Protonenzahlen als die der deformierten.

Die Hinzunahme von Deformationen spielt also für die allgemeine Form der Dripline eine entscheidende Rolle. Die exakte Lage der Dripline deformierter Massentabellen bleibt zwar von der verwendeten Parametrisierung und Fit-Prozedur abhängig, aber nur in geringerem Maße als bei den nicht deformierten Rechnungen.

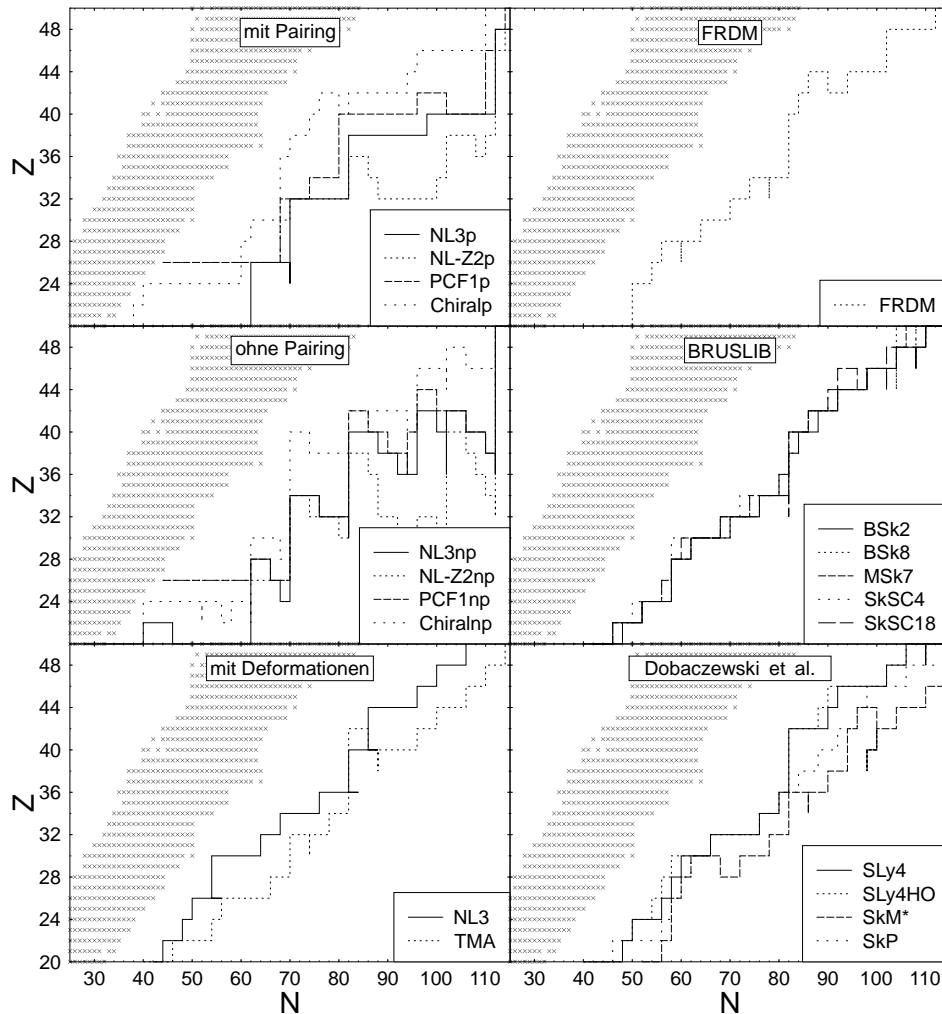


Abbildung 4.9: Nuklidkarten mit den Neutronen-Driplines aller theoretischen Kernmodelle aus Tabelle 3.1. Die linke Seite zeigt die relativistischen Modelle, die rechte die nichtrelativistischen und Tröpfchen-Modelle. Kreuze stellen die Kerne aus der atomaren Massentabelle [AWT03] dar.

Nichtrelativistische Modelle

Auch nach Hinzunahme der Modelle BSK2 und SkSC4 bleibt die überraschend gute Übereinstimmung der BRUSLIB-Modelle erhalten. Die Driplines beginnen bei $(N, Z) \approx (48, 20)$, verlaufen dann sehr linear und enden bei ungefähr $(108, 50)$. Die einzigen deutlicheren magischen Zahlen sind die Protonenzahl 30 und die Neutronenzahl 82.

Das bisher noch nicht besprochene Modell von Dobaczewski, SLy4HO, zeigt nur sehr geringe Abweichungen von SLy4 und zwar in den Bereichen um $N = 88 - 92$

und $N = 54 - 58$, die magischen Zahlen sind dieselben. Verglichen mit den Driplines der BRUSLIB-Massentabellen sind SLy4 und SLy4HO diesen ähnlich, SkM* und SkP liegen bei kleineren Protonenzahlen.

Bei den Driplines der Massentabellen von Dobaczewski weist nur SkP ein ähnlich ausgeprägtes lineares Verhalten wie die BRUSLIB-Modellen auf, SLy4 und SLy4HO zeigen deutlichere Schalenabschlüsse und SkM* ist hingegen sehr sprunghaft.

4.2.5 Sequenzen

In diesem Abschnitt sollen noch einmal die wesentlichen Ergebnisse für die Sequenz der unterschiedlichen Kernmodelle zusammengefasst und miteinander verglichen werden. Hierzu sind in Abb. 4.10 alle Sequenzen im Überblick dargestellt.

Die Sequenzen der Parameter-Sätze von BRUSLIB liegen auch unter Hinzunahme von BSk2 und SkSC4 beinahe komplett übereinander, es gibt nur geringe Abweichungen untereinander. Die Sequenzen folgen auffällig eng den magischen Zahlen 50 und 82 und ähneln in dieser Hinsicht dem Tröpfchen-Modell FRDM. Die bisher nicht betrachteten Grundzustandskerne von SkSC4 unterscheiden sich nur um einen einzigen Kern von denen von SkSC18: die besonders ausgeprägte Sequenz entlang $N = 82$ beginnt für SkSC4 und die restlichen BRUSLIB-Modelle bereits bei $Z = 46$, für SkSC18 erst bei $Z = 44$. Bei BSk2 treten gegen Ende der Sequenz zwei Kerne mit $N = 84$ auf, sonst sind keine Abweichungen festzustellen.

Bei den Modellen von Dobaczewski findet man ein anderes Bild. Hier ist die größte besetzte Protonenzahl nur 42, insgesamt liegen die Sequenzen bei nicht ganz so großen Werten von Z und zeigen größere Abweichungen voneinander. Die Sequenz von SLy4HO ist zu der von SLy4 identisch, die Rechnung in der harmonischen Oszillator-Basis zeigt keine Auswirkung. Die Sequenzen von SLy4 und SLy4HO ähneln denen von BRUSLIB, erreichen aber nicht so große Werte von Z . Die beiden Massentabellen SkM* und SkP zeigen durch die auffälligen Isotopensequenzen ein gänzlich anderes Verhalten als alle anderen betrachteten Massentabellen. Auch die sonst äußerst oft auftretenden magischen Zahlen $N = 50$ und 82 werden bei diesen beiden Modellen nicht besetzt.

Bei den relativistischen Modellen treten $N = 50$ und $N = 82$ wieder als die dominanten magischen Zahlen hervor, allerdings gibt es für diese Modelle vermehrt ausgefallene Kerne abseits dieser beiden magischen Zahlen. Insbesondere beim Modell Chiral wurden signifikante Unterschiede in den magischen Zahlen festgestellt, hier übernimmt $N = 70$ die Rolle von $N = 82$. Dieses ungewöhnliche Verhalten wurde auf die Hinzunahme von Tensortermen für das ρ -Meson im effektiven Lagrangian zurückgeführt, die, verglichen mit den anderen Modellen, eine unterschiedliche Isospin-abhängige Spin-Orbit-Kopplung zur Folge haben.

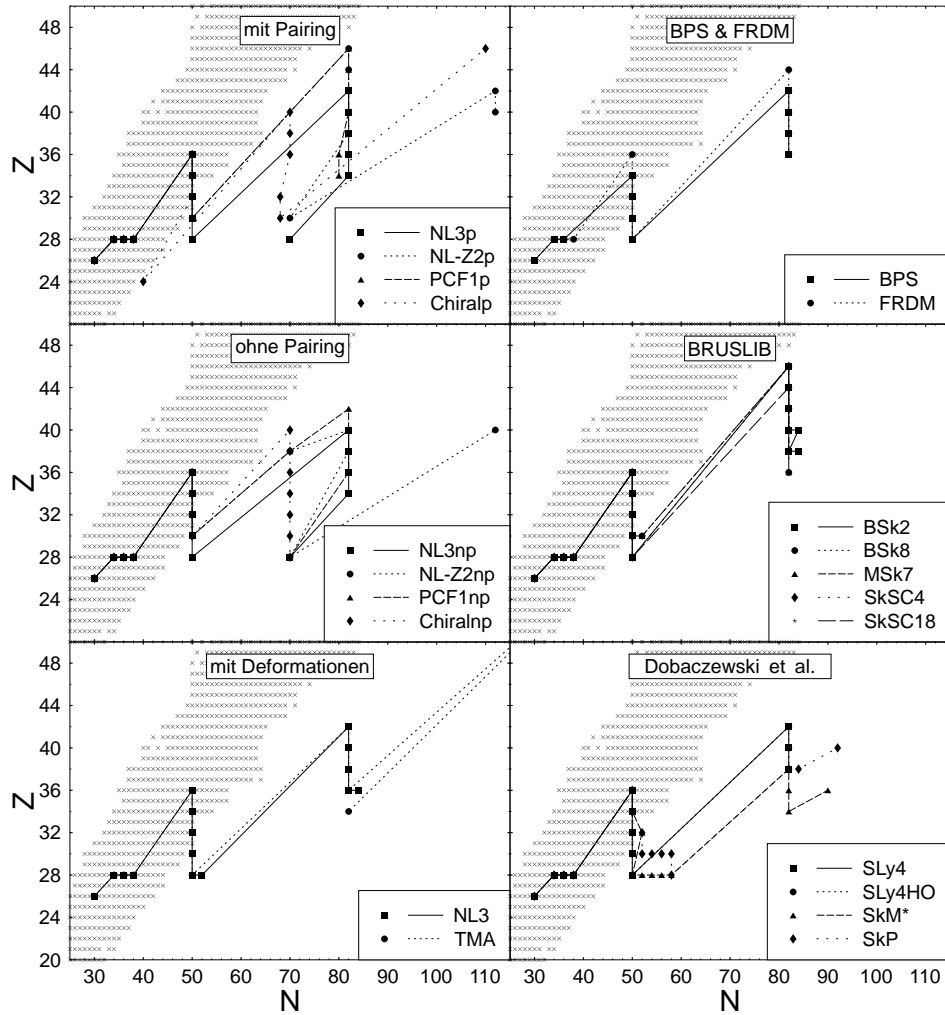


Abbildung 4.10: Die Sequenzen der Kerne in der äußeren Kruste nicht akkretierender kalter Neutronensterne unter Verwendung der verschiedenen nuklearen Modelle. Darstellung analog zu Abb. 4.9.

Im Vergleich der sphärischen relativistischen Modelle mit und ohne Pairing kam es zu einem Aufsplitten der Sequenz, das auch in der Dripline wiedergefunden werden konnte. Beim chiralen Modelle wurde die magische Neutronenzahl 70 in 68 und 70 aufgesplittet, bei PCF1 82 in 80 und 82.

Die Berücksichtigung von Deformationen zeigte nur relativ geringe Auswirkungen auf die Sequenz. Auch die deformierten relativistischen Rechnungen TMA und NL3def bestätigen das sonst gefundene Bild, dass sich die Sequenz bis auf geringe Abweichungen entlang der magischen Zahlen $N = 50$ und 82 orientiert. Der in TMA auftauchende Kern $^{180}_{54}\text{Xe}$ stellt den schwersten Kern der Sequenzen aller hier betrachteten Modelle dar.

Die klassische, von BPS gefundene Sequenz weist eine überraschend gute Übereinstimmung mit den aktuellsten theoretischen Kernmodellen auf. Für den Vergleich der hier präsentierten Ergebnisse mit existierenden Rechnungen sei auf Kapitel 4.2.7 verwiesen.

4.2.6 Ergebnisse der Top-Modelle

In Abb. 4.11 werden die Sequenzen und Driplines für fünf verschiedene Kernmodelle dargestellt, die aus den verschiedenen Gruppen theoretischer Kernmodelle als am repräsentativsten und modernsten ausgewählt wurden. Für die nichtrelativistischen Modelle von BRUSLIB wurde BSk8, für die von Dobaczewski SLy4 genommen. NL3def und TMA repräsentieren die relativistischen Modelle, FRDM die Tröpfchenmodelle. Jede dieser fünf Massentabellen berücksichtigt Deformationen.

Betrachtet man die Driplines, so ist für alle Modelle ein weitestgehend linearer Verlauf von $(N, Z) \simeq (20, 46)$ bis $(82, 36)$ erkennbar. Bei der magischen Neutronenzahl 82 verändert sich die Steigung, die Dripline verläuft senkrecht. Alle Modelle sagen zwischen $Z = 36$ und 38 bei $N = 82$ eine exakt gleiche Lage der Dripline hervor. Die Dripline wird somit in diesem Bereich mit größtmöglicher Übereinstimmung festgelegt. Von $(82, 40)$ bis $(108, 50)$ folgt ein Bereich mit linearem Verlauf und ähnlicher Steigung wie für Neutronenzahlen $N < 82$. Insgesamt wird die Neutronen-Dripline in der Protonenzahl genauer bestimmt als in der Neutronenzahl. Für Z findet man $\Delta Z = 6$ als größte Abweichung, bei $28 < Z < 30$ tritt mit $\Delta N = 16$ zwischen den Modellen NL3def und TMA die größte Diskrepanz in der Vorhersage für die Neutronenzahl auf. Ähnlich große Differenzen sind des Weiteren im Bereich $(N, Z) \simeq (100, 44)$ zwischen den Modellen TMA und SLy4 oder NL3def zu erkennen. Die Bereiche größerer Abweichung liegen gerade zwischen den magischen Zahlen, also dort, wo einerseits Deformationen an Bedeutung gewinnen und andererseits die Sequenz nicht entlang läuft.

Dies hat zur Folge, dass die Sequenzen größtenteils direkt übereinander liegen, und nur geringe unterschiedliche Merkmale der einzelnen Modelle deutlich werden. Beginnend mit Eisen und den Nickel-Isotopen, werden bis auf vier Ausnahmen nur Kerne mit $N = 50$ und 82 gefunden. Wie bereits erwähnt, ist bei BSk8 $N = 50$ nicht besonders ausgezeichnet, stattdessen wird, wie auch bei NL3def, ein Kern mit $N = 52$ gefunden. Bei der $N = 82$ -Serie ist ebenfalls BSk8 auffällig, da es bei sehr großen Werten von Z beginnt. Es schließen sich die drei Isotone ^{124}Mo , ^{122}Zr und ^{120}Sr an, die von allen fünf Modellen besetzt werden. Nach dem Ausreißer $^{180}_{54}\text{Xe}$ endet TMA, wie auch alle anderen Modelle außer NL3def, auf der Dripline bei $N = 82$, NL3def bei $N = 84$. Dieser Endpunkt der Sequenz bei $N = 82$ ($N = 84$ für NL3def) und $Z = 34 - 38$, wird, wie auch die vorangehende Sequenz bei $N = 82$, aufgrund der gleichen Vorhersage für die Dripline der Kernmodelle sehr genau bestimmt.

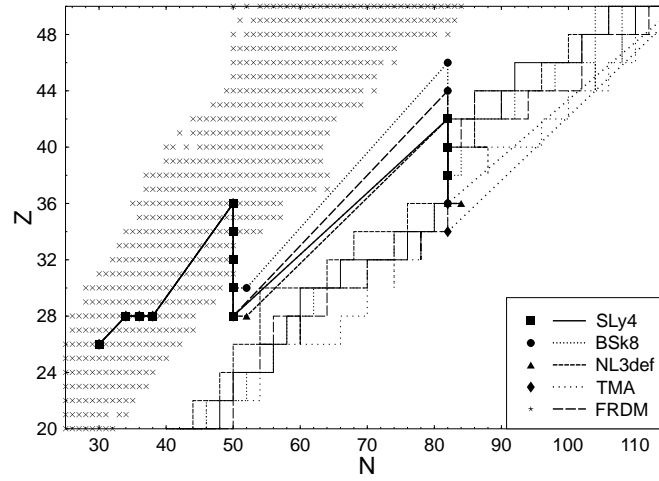


Abbildung 4.11: Nuklidkarte mit den Sequenzen der repräsentativsten Kernmodelle aus Tabelle 3.1 und deren Neutronen-Driplines.

Diese Resultate beruhen auf der Extrapolation und Erhaltung der bekannten magischen Neutronenzahl $N = 82$ bis zum Erreichen der Dripline in den hier untersuchten Massentabellen. Unterschiedliche Isospin-Abhängigkeiten der Spin-Orbit-Terme könnten unter anderem allerdings zur Auslöschung oder Verschiebung von Schaleneffekten führen, wie auch in den Modellen Chiral, SkM* oder SkP zu sehen ist.

Anhand von Abb. 4.12, welche die Protonenzahl als Funktion der Massen-Dichte zeigt, soll die Dichteabhängigkeit der Sequenzen der unterschiedlichen Modelle untersucht werden. Hierbei wird nur der Dichtebereich $\rho \geq 10^{10} \text{ g/cm}^3$ abgebildet, da bis zu einer Dichte von $\rho \sim 3,5 \cdot 10^{10} \text{ g/cm}^3$ die Sequenzen der fünf ausgewählten Modelle allein durch Kerne aus der Audi-Wapstra-Tabelle gegeben sind und somit identisch verlaufen: ${}^{26}\text{Fe}$, ${}^{28}\text{Ni}$, ${}^{36}\text{Kr}$, ${}^{34}\text{Se}$, ${}^{32}\text{Ge}$ und ${}^{30}\text{Zn}$. ${}^{80}\text{Zn}$ stellt für alle hier betrachteten und bis auf wenige Ausnahmen auch für die meisten anderen Kernmodelle, den letzten Kern der Sequenz dar, dessen Masse im Experiment bestimmt wurde. Somit ist die Sequenz bis zu Dichten von $\sim 4 \cdot 10^{10} \text{ g/cm}^3$ durch experimentelle Daten festgelegt. Erst anschließend folgen Kerne der theoretischen Vorhersagen. Für alle der Top-Kernmodelle ist das als nächstes ${}^{28}\text{Ni}$, außer für TMA, bei dem stattdessen bei $\rho \sim 10^{11} \text{ g/cm}^3$ der Sprung von ${}^{80}\text{Zn}$ zu ${}^{46}\text{Pd}$ kommt. Die Isotope ${}^{42}\text{Mo}$, ${}^{40}\text{Zr}$ und ${}^{38}\text{Sr}$ erscheinen bei geringfügig unterschiedlichen Dichten in allen Rechnungen. Die größten Unterschiede sind um $\rho \sim 10^{11} \text{ g/cm}^3$ zu verzeichnen; haben erst einmal alle Modelle Kerne mit $N = 82$ erreicht, werden die Unterschiede geringer. Erst kurz vor Erreichen der Dripline springt TMA zu ${}^{54}\text{Xe}$. Schließlich enden die Sequenzen bei sehr ähnlichen Dichten von $\rho \sim 4 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$ bei ${}^{38}\text{Sr}$, ${}^{36}\text{Kr}$ oder ${}^{34}\text{Se}$.

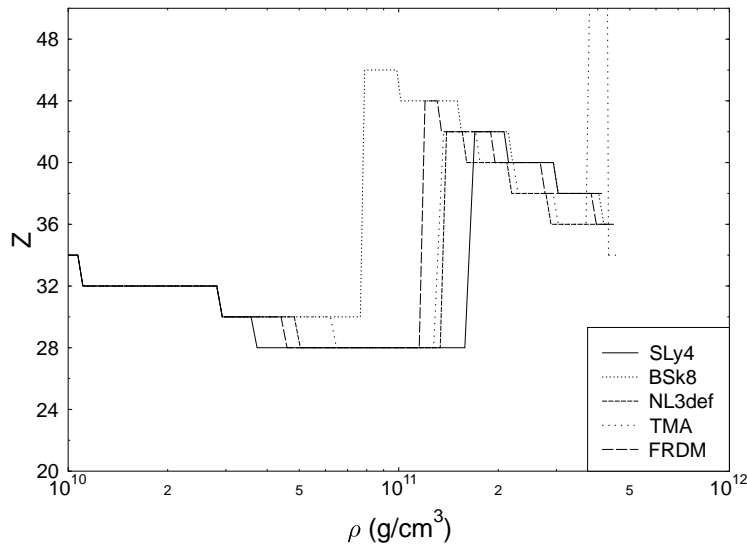


Abbildung 4.12: Die Protonenzahl Z in Abhängigkeit der Massendichte ρ für die ebenfalls in Abb. 4.11 dargestellten Kernmodelle.

4.2.7 Vergleich mit vorangehenden Arbeiten

Um die aktuellen Ergebnissen mit den Kernsequenzen der vorangehenden Arbeiten von BPS [BPS71], HZD [HZD89] und HP [HP94] vergleichen zu können, werden diese in tabellarischer Form im Anhang angegeben. Tabelle B.1 zeigt die neu berechnete Sequenz von BPS, Tabelle B.2 und Tabelle B.3 die veröffentlichten Ergebnisse von HZD, Tabelle B.4 und Tabelle B.5 die Ergebnisse von HP. In Tabelle B.6 und Tabelle B.7 werden die Ergebnisse der aktuellen Rechnung repräsentativ für BSk8 und TMA zusammengefasst. In den Tabellen wird für jeden Kern der Sequenz die maximale Dichte und weitere Zustandsgrößen angegeben, bei welcher der Übergang zum nächsten Kern stattfindet. Die jeweils letzte Zeile gibt die Werte für das Erreichen des Neutronen-Drip-Punktes an.

Beim Vergleich der unterschiedlichen Ergebnisse ist zu beachten, dass in den Arbeiten von BPS und HZD nur theoretische Kernmodelle betrachtet wurden. Erst HP verwendeten mit dem Audi-Wapstra-Katalog von 1993 [AW93] auch experimentelle Daten. Da geringe Unterschiede in der Sequenz nur sehr geringe Auswirkungen auf die Zustandsgleichung haben (siehe Abschnitt 4.1), soll in diesem Abschnitt nur auf die unterschiedlichen Sequenzen eingegangen werden. Eine detaillierte Studie der Auswirkungen der Erweiterung des BPS-Modells um Terme höherer Ordnung folgt im nächsten Kapitel.

Die erste Abweichung, die in den verschiedenen Sequenzen auftaucht, betrifft das Nuklid ^{66}Ni . In der ersten Berechnung der äußeren Kruste von BPS mit der Massen-

formel von Myers und Swiatecki [MS66] wird dieses Isotop nicht als Grundzustand gefunden. Fast 20 Jahre später kommen HZD auf ein uneindeutiges Resultat: Unter Verwendung des sphärischen Modells SkP von Dobaczewski, Flocard und Treiner [DFT84] taucht ^{66}Ni nicht auf; mit dem Tröpfchen-Modell von Myers [Mye77] hingegen schon. In allen der neusten Berechnungen wird ^{66}Ni als Kern in der Sequenz gefunden.

In der aus der Massenformel von Myers und Swiatecki [MS66] resultierenden Sequenz taucht dafür ^{76}Fe auf, das sonst nur noch von HZD mit dem Tröpfchen-Modell von Myers [Mye77] gefunden wurde. Auch sonst wurden außer ^{56}Fe weder in der vorliegenden Arbeit noch in den anderen Veröffentlichungen weitere Eisen-Isotope gefunden.

Des Weiteren fällt auf, dass in allen Tabellen, außer bei BSk8, ^{78}Ni erscheint. In den Berechnungen von HP stammt dieser Kern sogar aus den experimentellen Daten von [AW93], in der neuesten Version der Audi-Wapstra-Tabellen von 2003 [AWT03], die für TMA und BSk8 verwendet wurden, ist ^{78}Ni hingegen nicht mehr aufgeführt. So wird die Masse dieses Kerns den theoretischen Modellen entnommen, und die Existenz dieses Kerns von der jeweiligen Vorhersage der Modelle abhängig. Aus diesem Grund ist auch die angegebene maximale Dichte, bei welcher der letzte experimentelle Kern auftritt, bei HP mit $\sim 10^{11} \text{ g/cm}^3$ größer als $\sim 4 \cdot 10^{10} \text{ g/cm}^3$, der Wert der vorliegenden Rechnung. Zu den Zeiten der Veröffentlichung von BPS war bei einer Dichte von $8,2 \cdot 10^9 \text{ g/cm}^3$ mit ^{84}Se der letzte Kern der Sequenz erreicht, den man bereits experimentell studiert hatte. Somit ist es gelungen, den Bereich der äußeren Kruste mit experimentell bestimmter Zusammensetzung, um immerhin einen Faktor 10 zu vergrößern.

Mit der Massentabelle TMA erhält man eine Sequenz, die jener aus der Massenformel von Möller und Nix [MN88] in der Arbeit von HP sehr ähnelt. Nur die Isotonen-Reihe bei $N = 82$ beginnt mit [MN88] bei dem um zwei atomaren Masseneinheiten schwereren Element ^{126}Ru , und endet auch anstatt bei ^{116}Se bereits bei ^{118}Kr , ansonsten sind die Sequenzen identisch.

Aus der Rechnung mit der Massentabelle [DFT84] von HZD wurde eine Sequenz bestimmt, die sich deutlich von den anderen hier betrachteten unterscheidet. Erstaunlicherweise treten hier fast ausschließlich Nickel-Isotope auf. Nach der bekannten Reihe ^{62}Ni , ^{64}Ni , ^{66}Ni folgt ^{84}Se . Durch zwei Zink-Isotope unterbrochen schließen sich erneut Nickel-Isotope bis zu dem exotischen Kern ^{88}Ni an. Die Sequenz wird schließlich durch drei Zirkonium-Isotope beendet. In der gesamten Sequenz wird kein einziges Mal dieselbe Neutronenzahl zweimal hintereinander besetzt. Diese ausgeprägten Protonen-Schalenabschlüsse erinnern an die Ergebnisse, die mit SkM* und SkP in der aktuellen Rechnung gefunden wurden. Bei der Massentabelle [DFT84] verwendeten Dobaczewski, Flocard und Treiner ebenfalls den Parametersatz SkP, insofern ist diese Ähnlichkeit nicht überraschend. Wieso wird aber in der neuen

Rechnung nicht exakt die gleiche Sequenz gefunden? Stattdessen sind sogar deutliche Unterschiede erkennbar, so ist bei SkP $Z = 30$ die prominenteste Protonenzahl und nicht $Z = 28$. Die Massentabelle von Dobaczewski, Flocard und Treiner wurde nur in sphärischer Rechnung erstellt, die aktuell verwendete hingegen unter der Berücksichtigung von Deformationen. Außerdem wurde in der neueren Massentabelle eine modernere Form des δ -Pairings verwendet. Obwohl es sich um den gleichen Parametersatz handelt, führt die Hinzunahme von Deformationen und eine veränderte Paarkraft zu einer Verschiebung des Protonen-Schalenabschlusses um $\Delta Z = 2$, und einer anderen Besetzung der Grundzustandskerne in der Sequenz. Erhalten bleibt die ähnliche Gesamttendenz, dass sich die Sequenz entlang gleicher Protonenzahlen orientiert. Bei SkM* wurde dasselbe Verhalten festgestellt, die Sequenz ist der von [DFT84] sogar noch ähnlicher als SkP, bei SkM* ist ebenfalls $Z = 28$ eine magische Protonenzahl. Allerdings kommt für größere Dichten bei SkM* die magische Neutronenzahl $N = 82$ wieder zum Vorschein.

Eine ähnliche Übereinstimmung der Massentabellen gibt es für SkSC4 und der von HP verwendeten Massentabelle mit der Referenz [APDT92]. Beide Massentabellen beruhen auf dem gleichen Parametersatz SkSC4, allerdings wurden verschiedene Formen der Paarkraft verwendet und in der ersten Massentabelle Deformationen nur näherungsweise berechnet. Die resultierenden Sequenzen sind bis auf einen einzigen Unterschied identisch, ^{128}Pd taucht bei HP nicht auf. Auch unterschiedliche Erweiterungen höherer Ordnung könnten diese Abweichung verursacht haben.

In Tabelle 4.1 wird der jeweils letzte Kern der Sequenz vor Erreichen der Dripline für die vorangehenden Arbeiten von BPS, HZD und HP und fünf ausgewählten Massentabellen der aktuellen Rechnungen angegeben. Alle diese Kerne, bis auf die der Kernmodelle NL3def und [DFT84], das auch sonst eine ungewöhnliche Sequenz zeigte, besitzen die Neutronenzahl 82. Mit $N = 94$ und $Z = 40$ sind sowohl Protonen- als auch Neutronenzahl bei [DFT84] ungewöhnlich hoch. Von dieser Massentabelle abgesehen, variiert die Ladungszahl des letzten Kerns zwischen 32 und 38 und wird somit nicht ganz so präzise vorhergesagt wie die Neutronenzahl. Sieht man von [DFT84] ab, liegen die Ergebnisse der alten und neuen Berechnungen in einem konsistenten Rahmen.

Jahr	Element	Z	N	Modell	Referenzen
1966	^{118}Kr	36	82	Tröpfchen-Modell	[MS66]
1977	^{114}Ge	32	82	Tröpfchen-Modell	[Mye77]
1984	^{134}Zr	40	94	SkP (sphärisch)	[DFT84]
1988	^{118}Kr	36	82	Tröpfchen-Modell	[MN88]
1992	^{120}Sr	38	82	SkSC4 (sphärisch?)	[APDT92]
1995	^{118}Kr	36	82	FRDM	
1997/1999	^{120}Kr	36	84	NL3def	
1998/2004	^{120}Sr	38	82	SLy4	
2004	^{118}Kr	36	82	BSk8	
2005	^{116}Se	34	82	TMA	

Tabelle 4.1: Der Endpunkt der Kernsequenz unter Verwendung der angegebenen theoretischen Kernmodelle. Oberer Teil: Ergebnisse von BPS, HZD und HP mit älteren Kernmodellen. Unterer Teil: Ergebnisse dieser Arbeit unter Verwendung aktuellster Modelle aus Tabelle 3.1.

Kapitel 5

Analyse

5.1 Auswirkungen der Erweiterungen

Neben der Verwendung der neusten experimentellen Daten und theoretischen Modelle, stellen die Erweiterungen, die in Kap. 2.2 vorgestellt wurden, eine weitere Aktualisierung und Verbesserung des ursprünglichen BPS-Modells [BPS71] dar. In diesem Kapitel sollen die einzelnen Beiträge der Terme höherer Ordnung und deren Auswirkungen auf die Sequenz und Zustandsgleichung analysiert werden.

5.1.1 Sequenzen

Zunächst werden in Abb. 5.1 die Sequenzen ohne die Terme höherer Ordnung, d. h. ohne die Screening-Energie W_{Sc} , Austauschenergie W_{Ex} , Nullpunktsenergie W_{zp} und die atomaren Bindungsenergien B_{el} betrachtet, alle Änderungen gegenüber Abb. 4.10 sind farbig markiert.

Die Korrekturen durch die atomaren Bindungsenergien B_{el} wurden in der Rechnung, wie in Abschnitt 2.2.2 beschrieben, nur auf die Audi-Wapstra-Daten angewandt. Betrachtet man die Kerne, die im Bereich der Audi-Wapstra-Daten liegen, so sind keine Unterschiede in der Sequenz festzustellen. Im Bereich geringer Dichte sind die Korrekturen durch W_{Sc} und W_{Ex} nur sehr klein, und die atomare Bindungsenergie B_{el} stellt mit ungefähr 100 keV sogar die größte Korrektur dar. Vergleicht man dies mit der Masse von ^{56}Fe von ungefähr 56 GeV und berücksichtigt, dass W_{Sc} und W_{Ex} für nichtrelativistische Elektronen beide von entgegengesetztem Vorzeichen wie B_{el} sind, so ist nicht verwunderlich, dass die Sequenz unverändert bleibt.

Für größere Dichten sind für einzelne Modelle geringfügige Unterschiede festzustellen. Bei den Modellen NL-Z2, PCF1, FRDM, BSk2, MSk7 und SkSC4 fallen

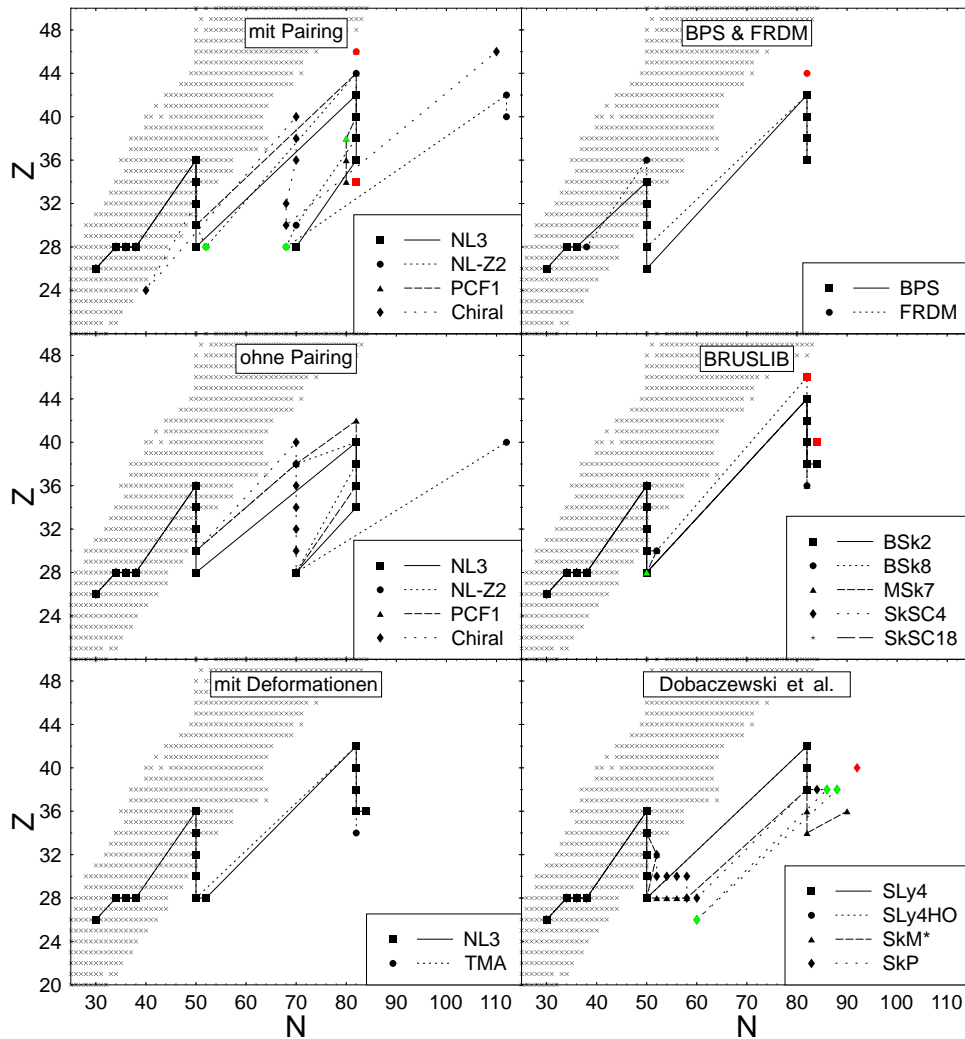


Abbildung 5.1: Nuklidkarten mit den Sequenzen der Kerne in der äußeren Kruste nicht akkretierender kalter Neutronensterne unter Verwendung der verschiedenen nuklearen Modelle aus Tabelle 3.1, nun allerdings für eine Rechnung ohne die Terme höherer Ordnung aus Kap. 2.2. Grün dargestellte Symbole zeigen Kerne, die im Vgl. zu Abb. 4.10 (Rechnung mit Erweiterungen) neu hinzugekommen sind, rot dargestellte sind weggefallen. Kreuze zeigen die Kerne aus der atomaren Massentabelle [AWT03].

jeweils die Kerne mit größtem Z bei $N = 82$, ^{126}Ru bzw. ^{128}Pd , aus der Sequenz raus. Auch der schwerste gefundene Kern aller Modelle, $^{180}_{54}\text{Xe}$, verschwindet aus der Sequenz von TMA, wenn auf die Erweiterungen verzichtet wird. Des Weiteren werden, außer bei dem chiralen Modell und bei BSk8, keine $_{46}\text{Pd}$ -Isotope mehr gefunden, bei den meisten Modellen liegt das größte Z nur noch bei 42. Außer SkP sind die Rechnungen mit Massentabellen von Dobaczewski nicht von diesem Effekt betrof-

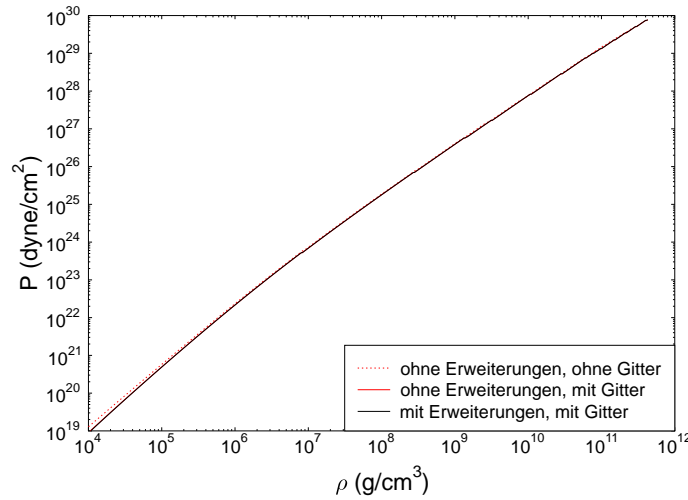


Abbildung 5.2: Die für die Massentabelle BSk8 berechnete Zustandsgleichung mit und ohne Erweiterungen des BPS-Modells und unter Vernachlässigung des Gitters.

fen, deren Sequenzen sowieso schon bei kleineren Ladungszahlen liegen. SkP zeigt mehrere Änderungen in der Sequenz, die erst gegen Ende, also im Bereich großer Dichten auftreten: Auch hier verschwindet der schwerste Kern, ^{132}Zr . Stattdessen wird die Sequenz durch zwei relativ schwere Strontium-Isotope und das ungewöhnliche Eisen-Isotop ^{86}Fe beendet. Bei NL-Z2 und MSk7 zeigt sich dieselbe Tendenz, dass Elemente mit geringem Z , in diesem Fall $Z = 28$ -Isotope, ohne die Korrekturen vermehrt auftreten.

Die relativistischen Rechnungen ohne Pairing bleiben komplett unverändert. Wahrscheinlich führt das Weglassen des Pairings zu so ausgeprägten Differenzen in den Bindungsenergien, dass die kleinen Korrekturen der Erweiterungen demgegenüber keine Rolle spielen.

Zusammenfassend lässt sich also feststellen, dass die Erweiterungen des BPS-Modells im Bereich kleiner Massenzahl A dazu führen, dass Kerne mit geringem Z verschwinden, dafür aber bei hohen Massenzahlen Kerne mit großem Z neu erscheinen. Die Korrekturen favorisieren stark geladene Kerne, das generelle Verhalten der Sequenz und die Orientierung an den magischen Zahlen $N = 50$ und 82 bleiben jedoch erhalten.

5.1.2 Zustandsgleichung

Nachdem die Veränderungen in den Sequenzen untersucht wurden, sollen im Folgenden die Auswirkungen der Erweiterungen auf die Zustandsgleichungen näher

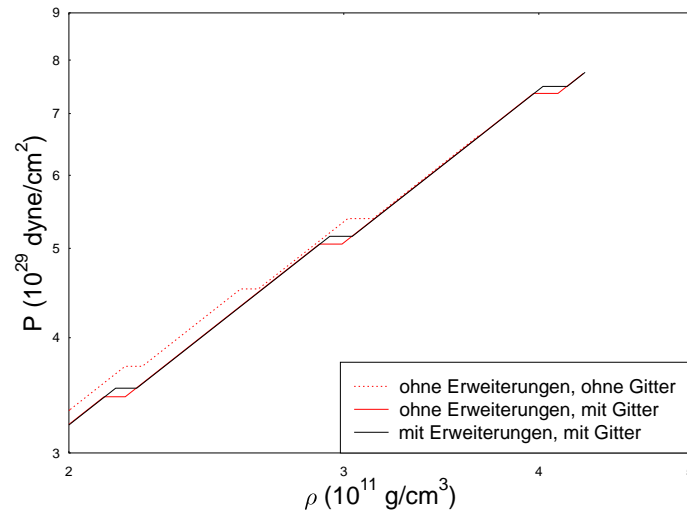


Abbildung 5.3: Wie Abb. 5.2, nun für den Bereich hoher Dichte.

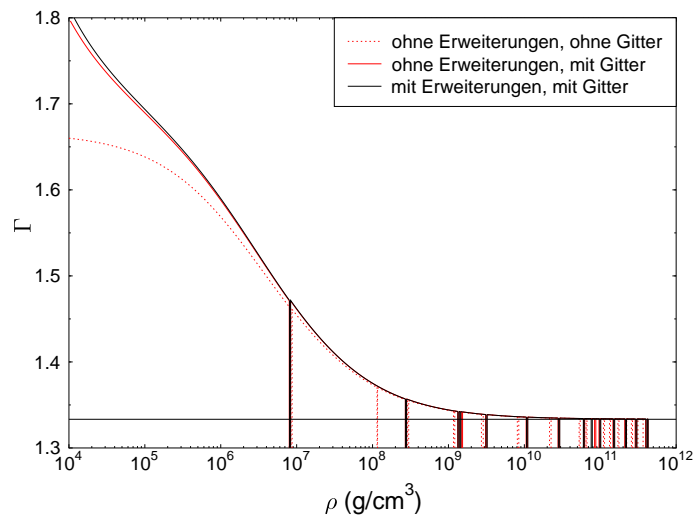


Abbildung 5.4: Der adiabatische Index für den Parametersatz BSk8 mit und ohne Erweiterungen des BPS-Modells höherer Ordnung, und unter zusätzlicher Vernachlässigung des Gitters.

betrachtet werden. Da die Zustandsgleichungen der verschiedenen Massentabellen untereinander keine signifikanten Unterschiede zeigen, ist es hierfür ausreichend, exemplarisch ein einzelnes Modell zu untersuchen. Hierzu wurde das Skyrme-HFB-Modell BSk8 ausgewählt, dessen Sequenz mit und ohne Erweiterungen identisch ist, so dass der Effekt der Erweiterungen auf die Zustandsgleichung für die gleiche Kernsequenz analysiert werden kann.

Abb. 5.2 zeigt die Zustandsgleichung mit und ohne Korrekturen über den gesamten betrachteten Dichtebereich. Die beiden Kurven liegen, soweit erkennbar, direkt übereinander. Auch im Hochdichte-Bereich, der in Abb. 5.3 vergrößert dargestellt wurde, sind die Zustandsgleichungen nahezu identisch, allerdings treten die Übergänge ohne die Erweiterungen bei geringfügig niedrigeren Dichten auf. Der Neutronen-Drip wird ohne Erweiterungen mit einer Dichte von $\rho = 4,272 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$ im Vergleich zu $4,283 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$ ebenfalls etwas früher erreicht. Betrachtet man den adiabatischen Index, der in Abb. 5.4 dargestellt ist, wird das bisher gefundene Bild weitestgehend bestätigt. Im Bereich geringer Dichten von 10^4 bis 10^6 g/cm^3 sind diesmal allerdings geringe Abweichungen zu erkennen, der adiabatische Index mit Erweiterungen ist etwas größer als der ohne. Dieser Unterschied besteht bereits in den Zustandsgleichungen: Der Druck der Rechnung mit Erweiterungen liegt in diesem Dichtebereich unter dem der Rechnung ohne Erweiterungen. Die Abweichung ist nur so gering, dass sie in Abb. 5.2 nicht erkennbar ist. Insgesamt führt die Hinzunahme der Erweiterungen des BPS-Modells nur zu sehr geringen Änderungen der Zustandsgleichung und des adiabatischen Index.

5.2 Auswirkungen des Gitters

Wie in Kapitel 2.3 gezeigt wurde, kann das Gitter für besonders leichte Kerne bei sehr hohen Dichten oder aber bei hohen Temperaturen ($T_m \sim 80 \text{ keV}$) schmelzen. Der zweite Fall liegt bei noch nicht ausgekühlten oder akkretierenden Neutronensternen vor, die in Abschnitt 1.2.2 vorgestellt wurden. Beim Schmelzpunkt entspricht die Gitterenergie gerade der thermischen Energie der Kerne. Daher müsste in diesem Fall die Gitterenergie durch die thermische Energie und der Gitterdruck durch den thermischen Druck ($\Delta P \sim nk_B T$) ersetzt werden. Hier soll das System mit geschmolzenem Gitter einfach durch die in 2.1 gefundenen Zusammenhänge unter Wegfall der Gitterenergie und des Gitterdrucks (und der Terme höherer Ordnung) beschrieben werden. Somit werden die thermischen Beiträge vernachlässigt und weiterhin $T = 0$ angenommen. Eine systematische Studie des Einflusses der Temperatur wird in dieser Arbeit nicht durchgeführt.

Des Weiteren ist die Rechnung ohne Gitter von Interesse, um dessen Auswirkungen auf die Zustandsgleichung und Sequenz besser zu verstehen.

5.2.1 Sequenzen

Als erstes werden wieder die Auswirkungen auf die Sequenzen betrachtet, die in Abb. 5.5 für die Rechnung ohne Gitter und ohne Erweiterungen dargestellt sind.

Diesmal ergibt sich ein vollkommen anderes Bild, sowohl im Vergleich zur vollen

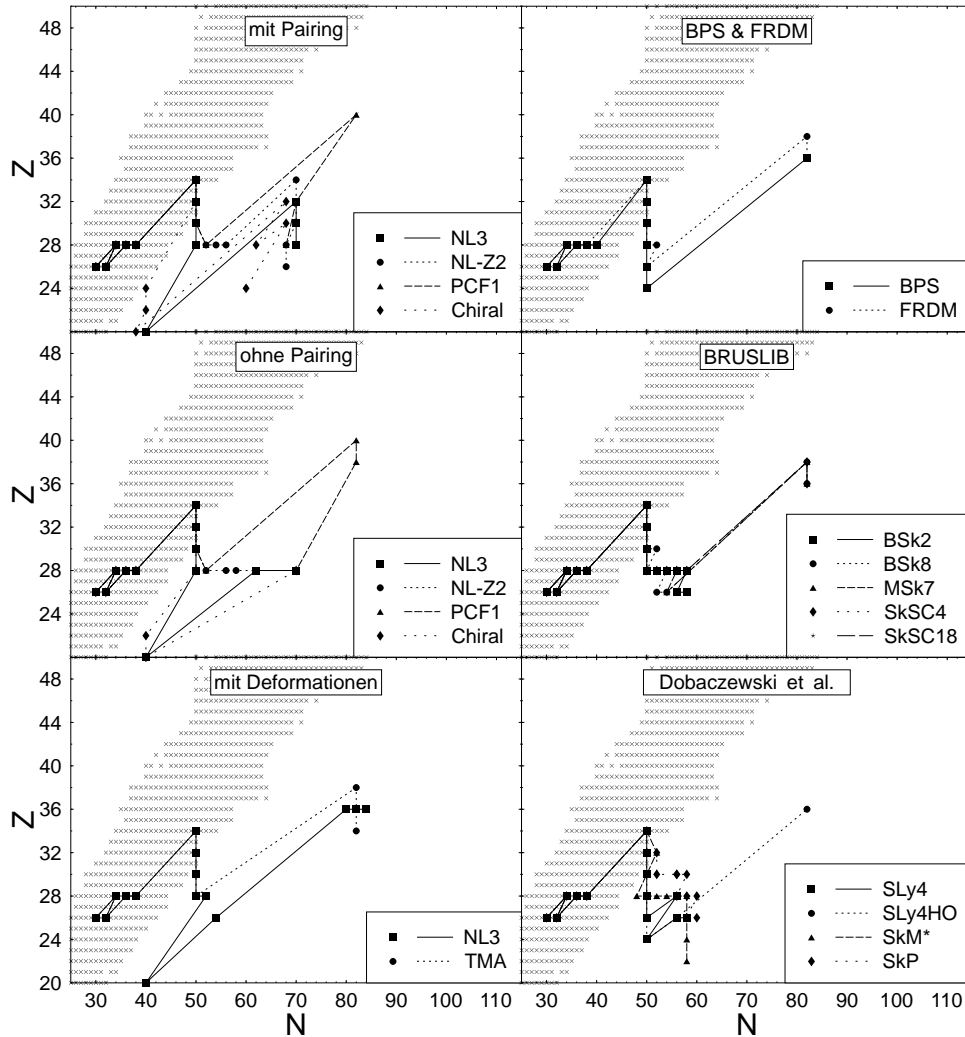


Abbildung 5.5: Nuklidkarten mit den Kern-Sequenzen für die verschiedenen nuklearen Modelle aus Tabelle 3.1, nun allerdings ohne die Terme höherer Ordnung aus Kap. 2.2 und ohne die Gitterenergie W_L und den zugehörigen Gitterdruck P_L .

Rechnung (Abb. 4.10) als auch unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung (Abb. 5.1). Alle Sequenzen liegen bei deutlich kleineren Werten von A und Z , der insgesamt schwerste Kern ist nur noch ^{122}Zr . Diesmal sind sogar Änderungen bei den ersten Kernen aus der Audi-Wapstra-Tabelle zu verzeichnen. Nach ^{62}Ni wird erneut ein Eisen-Isotop, ^{58}Fe , besetzt, und die Sequenz bei $N = 50$ beginnt mit ^{34}Se bereits bei einer um zwei geringeren Protonenzahl. Bei vielen Modellen hält sich die Sequenz nach $N = 50$ hauptsächlich in dem Bereich von $Z = 26 - 30$ und $N = 50 - 60$ auf, um dann nur noch vereinzelt Kerne mit $N = 82$ zu zeigen.

Betrachtet man NL3 mit Paarkraft aus der Gruppe der relativistischen Mean-Field-Modelle, findet man nach der $N = 50$ -Reihe den doppelt magischen Kern ^{60}Ca , der sonst bisher nicht zu beobachten war. Durch Weglassen des Gitters werden leichtere und schwach geladene Kerne bevorzugt, von denen ^{60}Ca einer der am stärksten gebundenen ist. Es folgen erstaunlicherweise drei Isotone bei $N = 70$, eine Neutronenzahl, die bisher nur beim chiralen Modell mehrfach besetzt wurde. Das letzte Nuklid der Sequenz ist dasselbe wie für die Rechnung mit Gitter, ^{78}Ni . Dieser Kern scheint bei NL3p also besonders stark gebunden zu sein. Bei NL-Z2 und PCF1 ist anzumerken, dass die Massentabelle erst bei $Z = 26$ beginnt, und somit die Sequenzen ohne Gitter nicht vollständig festgelegt werden können. Bei NL-Z2 sieht man das gleiche Verhalten wie bei NL3, dass es anstatt bei $N = 82$ zu einer Isotonen-Sequenz bei $N = 70$ kommt. Die Sequenz endet mit zwei Kernen der Neutronenzahl 68, von denen der erste bereits in der vollen Rechnung vorhanden war. Auch bei PCF1 werden schwere Kerne durch leichtere mit $N = 68$ bzw. 70 ersetzt. PCF1 ist das einzige relativistische Kernmodell, bei dem noch ein Nuklid mit $N = 82$ existiert. Das chirale Modell zeigt nun ein sehr sprunghaftes Verhalten, wobei neben Nukliden mit $N = 68$ und 70, die bereits schon vorher gefunden wurden, zwei Kerne mit $N = 40$ und ein Calcium-Isotop neu auftauchen.

Bei den relativistischen Rechnungen ohne Pairing ist $Z = 28$ die dominierende magische Zahl, außer den Kernen der Audi-Wapstra-Daten gibt es nur sehr wenige Kerne, die keine Nickel-Isotope sind. Bei PCF1 werden erneut $N = 82$ -Nuklide gefunden, die bereits bei der Rechnung mit Gitter vorhanden waren. Beim chiralen Modell ist $N=40$ wieder mehrfach besetzt, unter anderem durch ^{60}Ca , das auch bei NL3 immer noch als Grundzustand gefunden wird.

Die deformiert berechnete relativistische Massentabellen NL3 verläuft mit den zwei Nickel-Isotopen zunächst unverändert, um dann ebenfalls zu ^{60}Ca zu springen. Die Sequenz endet wie bisher mit Elementen mit $Z = 36$ in der Gegend um $N = 82$. Die Reihe der Grundzustandskerne von TMA verändert sich nur insofern, als dass die drei schwersten Nuklide mit $N = 82$ verschwinden.

Bei FRDM ist ein ähnliches Verhalten festzustellen. Hier fallen die zwei schwersten $N = 82$ -Kerne heraus, dafür tauchen zusätzliche Nickel- und Eisen-Kerne auf.

Bei den Rechnungen von BRUSLIB sind interessante Veränderungen zu beobachten. Im mittleren Dichtebereich ähneln die Sequenzen den Ergebnissen mit Gitter für die Massentabellen von Dobaczewski. Auf einmal kommt es zu ausgeprägten Isotopen-Sequenzen bei $Z = 28$ und $Z = 26$, die bisher nicht festzustellen waren. Dafür verkürzt sich die $N = 82$ -Reihe auf zwei Elemente.

Für die Kernmodelle von Dobaczewski findet man nur noch einen einzigen Kern mit $N = 82$, und zwar für die Massentabelle von SLy4HO. Bei SLy4 ist diesmal $N = 50$ anstelle von $N = 82$ eine ausgeprägte magische Neutronenzahl. Bei SkM* bleibt hingegen die magische Protonenzahl 28 erhalten. Bei SkP ist $Z = 30$ nach

wie vor mehrfach besetzt, wobei die schweren Nuklide durch zusätzliche Eisen- und Nickel-Kerne ersetzt wurden.

Die Rechnungen ohne Gitter liefern interessante Ergebnisse, da neue Ähnlichkeiten zwischen den unterschiedlichen Kernmodellen auftreten, die bisher nicht erkennbar waren. Bei allen drei Gruppen relativistischer Rechnungen tauchen ^{60}Ca oder andere Elemente mit $N = 40$ auf. Alle sphärischen relativistischen Rechnungen zeigen nun Kerne mit Neutronenzahl $N = 68/70$, die sonst nur für das chirale Modell magische Zahlen darstellten. Ohne Gitter kommt es zu neuen Gemeinsamkeiten der nichtrelativistischen Kernmodellen von BRUSLIB und Dobaczewski. Generell lässt sich feststellen, dass Eisen- und Nickel-Isotope vermehrt auftreten und sich die Sequenzen nun entlang von Isotopen und nicht mehr wie bisher entlang von Isotonen orientieren.

Dieses Verhalten kann in gewissem Maße durch folgende Überlegungen erklärt werden: Bei der Berechnung ohne Gitter wird aus dem gegebenen Druck direkt das chemische Potential der Elektronen bestimmt (vgl. Glg. (2.19)):

$$P = P_e(\mu_e) . \quad (5.1)$$

Das zu minimierende baryochemische Potential hat nun folgende Form:

$$\mu_b = \frac{W_N}{A} + \frac{Z}{A}\mu_e(P) \quad (5.2)$$

Ohne das Gitter wird die Abhängigkeit des Systems von der Ladungszahl geschwächt, das attraktive Gitter begünstigt hingegen Elemente mit großem Z . Stattdessen kommt der Bindungsenergie eine größere Bedeutung zu, so dass stark gebundene Kerne mit geringem Z/A -Verhältnis bevorzugt auftreten.

5.2.2 Zustandsgleichung

In Abb. 5.2 ist die Zustandsgleichung für die Massentabelle BSk8 ohne Erweiterungen und ohne Gitter zusammen mit den bisher betrachteten Rechnungen abgebildet. Zumindest im Bereich geringer Dichte ist der Effekt des Gitters, im Gegensatz zu dem der Erweiterungen, in dieser Darstellung sichtbar, bleibt aber gering. Der Druck ohne Gitter liegt über dem Druck mit Gitter, was auf die attraktive Wirkung des Gitters zurückzuführen ist. Für große Dichten scheint die Bedeutung des Gitters abzunehmen. Betrachtet man den Hochdichte-Bereich in Abb. 5.3, so wird dies bestätigt. Es gibt zwar andere Übergänge (da die Sequenzen unterschiedlich sind), die bei verschiedenen Dichten stattfinden, in den Bereichen abseits der Übergänge liegen die Zustandsgleichungen aber teilweise sogar direkt übereinander. Ohne Gitter wird der Neutronen-Drip-Punkt mit einer Dichte von $\rho = 3,67 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$ bereits ca. 10 % früher erreicht, als mit Gitter.

Betrachtet man den adiabatischen Index in Abb. 5.4, so werden die bisher festgestellten Zusammenhänge weiter verdeutlicht. Im Bereich geringer Dichte hat das Gitter nicht zu vernachlässigende Auswirkungen auf die Zustandsgleichung. Der adiabatische Index ohne Gitter liegt deutlich unter dem der Rechnung mit Gitter. Dies bedeutet, dass der Druck ohne Gitter langsamer mit der Energiedichte anwächst. Wie es bei den kleinsten Dichten zu dem Wert des adiabatischen Index der Zustandsgleichung ohne Gitter von $5/3$ kommt, und wieso der adiabatische Index mit Gitter größer ist, wird im folgenden Abschnitt geklärt werden.

5.3 Zusammensetzung der Zustandsgleichung

Nachdem die globalen Auswirkungen der Erweiterungen auf die Zustandsgleichung betrachtet wurden, sollen in diesem Abschnitt die einzelnen Beiträge zum Druck und der Energiedichte näher analysiert werden. In Abb. 5.6 sind hierzu die Anteile der Energiedichte der Elektronen ϵ_e , des Gitters ϵ_L , der Summe der Erweiterungen $\epsilon_{Erw} = n_N \cdot (W_{Sc} + W_{Ex} + W_{zp})$ und der atomaren Bindungsenergie $\epsilon_{Bel} = n_N \cdot B_{el}$ an der Gesamtenergiedichte ϵ_{tot} dargestellt.

Neben den abgebildeten Energiedichten fehlt der Beitrag der Kerne, $\epsilon_N = n_N \cdot W_N$, zur gesamten Energiedichte ϵ_{tot} . Da dieser aber wesentlich größer als die anderen Beiträge ist, entspricht ϵ_N im Wesentlichen ϵ_{tot} , daher wurde in Abb. 5.6 auf die Darstellung von ϵ_N verzichtet. Dass ϵ_N die Energiedichte dominiert, wird daran deutlich, dass keine der anderen Größen (und auch nicht deren Summe) einen Anteil von einem Prozent überschreitet. Nach ϵ_N folgt als nächstgrößerer Beitrag die Energiedichte der Elektronen. Ihr Anteil beträgt für geringe Dichten ungefähr konstant $2,6 \cdot 10^{-4}$, was mit guter Genauigkeit folgender nichtrelativistischer Abschätzung entspricht:

$$\epsilon_e/\epsilon_N = \frac{Z}{A} \frac{m_e}{m_n} = 2,53 \cdot 10^{-4}. \quad (5.3)$$

Bei einer Dichte von $\sim 2 \cdot 10^7 \text{ g/cm}^3$ ist der Relativitätsparameter der Elektronen gerade eins, d. h. der Fermi-Impuls der Elektronen entspricht ihrer Masse. In diesem Bereich werden die Elektronen relativistisch, was dazu führt, dass der Anteil der Elektronenenergiedichte an der Gesamtenergiedichte nicht mehr konstant bleibt, sondern anzuwachsen beginnt. Im relativistischen Limes $k_e/m_e c \gg 1$ gilt:

$$\epsilon_e \propto k_e^4 \propto n_e^{4/3} \quad (5.4)$$

$$\Rightarrow \epsilon_e \propto n_N^{4/3}, \quad (5.5)$$

und somit wächst ϵ_e/ϵ_N , unter Vernachlässigung der durch die Kernübergänge hervorgerufenen Unstetigkeiten, im relativistischen Grenzfall mit einem Exponenten von $1/3$, der auch im Graphen erkennbar ist.

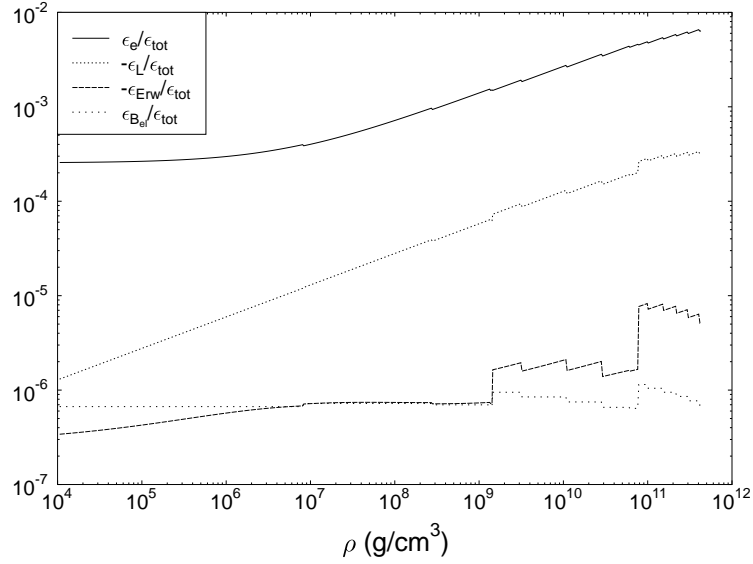


Abbildung 5.6: Die Anteile der Energiedichte der Elektronen ϵ_e , des Gitters ϵ_L , der Summe der Erweiterungen $\epsilon_{\text{Erw}} = n_N \cdot (W_{\text{Sc}} + W_{\text{Ex}} + W_{\text{zp}})$ und der atomaren Bindungsenergie $\epsilon_{\text{Bel}} = n_N \cdot B_{\text{el}}$ an der Gesamtenergiedichte ϵ_{tot} , berechnet für die Massentabelle BSk8.

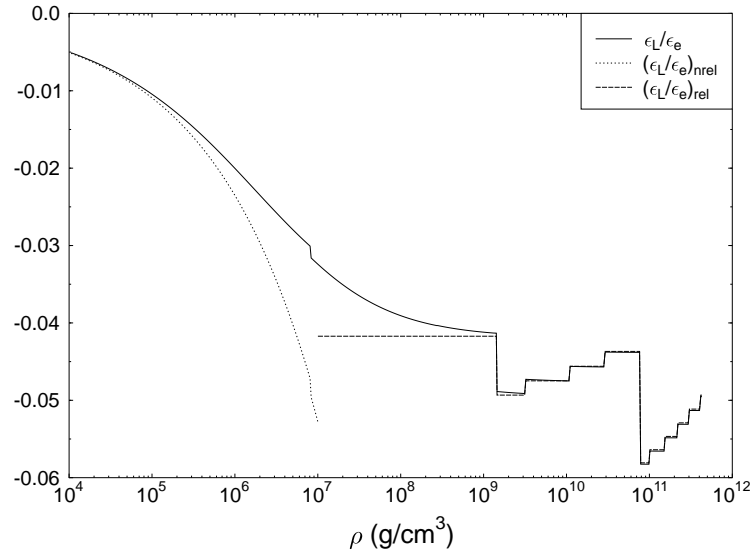


Abbildung 5.7: Das Verhältnis der Gitterenergiedichte ϵ_L zur Energiedichte der Elektronen ϵ_e , berechnet für die Massentabelle BSk8. Die gepunktete Kurve zeigt die nichtrelativistische und die gestrichelte die relativistische Abschätzung für ϵ_L/ϵ_e (siehe Glg. (2.16)) aus Abschnitt 2.1.3.

Die negative Gitterenergiedichte $\epsilon_L = n_N \cdot W_L$ ist über den gesamten Dichtebereich proportional zu $n_N^{4/3}$ und somit $\epsilon_L/\epsilon_N \propto n_N^{1/3}$. Für große Dichten wachsen also die Anteile der Energiedichte der Elektronen und des Gitters mit gleichem Exponenten. Für geringe Dichten existiert für ϵ_L jedoch kein Bereich konstantem Anteils wie bei den Elektronen. Dieses unterschiedliche Verhalten wird in Abb. 5.7 verdeutlicht, in der das Verhältnis der Gitterenergiedichte ϵ_L zur Elektronenergiedichte ϵ_e zu sehen ist. Zunächst wird der Betrag der Gitterenergiedichte mit der Dichte schnell größer, so dass das Verhältnis ϵ_L/ϵ_e rapide anwächst. Ab einer Dichte von 10^9 g/cm^3 ist das Verhältnis jedoch kaum noch von der Dichte, sondern hauptsächlich von der Ladung Z abhängig. Dies wird auch an den Näherungen für den nichtrelativistischen und relativistischen Grenzfall deutlich (siehe Glg. (2.16)), die eine unterschiedliche Dichteabhängigkeit zeigen. Vergleicht man in Abbildung 5.7 die Näherungen mit der vollen Rechnung, so ist eine sehr gute Übereinstimmung festzustellen.

In Abb. 5.6 sind die Korrekturen höherer Ordnung zur Gitter- und Elektronenenergie als Summe von $n_N \cdot (W_{Sc} + W_{Ex} + W_{zp})$ und der zur atomaren Bindungsenergie gehörende Energiedichte ϵ_{Bel} abgebildet. Die negative Summe der Erweiterungen ist zunächst annähernd konstant. Bei einer Dichte von 10^9 g/cm^3 steigt sie plötzlich an und zeigt dann eine große Abhängigkeit von der Ladungszahl Z .

ϵ_{Bel} ist für geringe Dichten betragsmäßig sogar größer als die Summe der Energiedichten der anderen Erweiterungen. Im Dichtebereich von $10^7 - 10^9 \text{ g/cm}^3$ sind die beiden Korrekturen mit guter Übereinstimmung gleichgroß, so dass sich deren Summe nahezu annihiliert. Dies erklärt, warum es für die Audi-Wapstra-Kerne, die bei den meisten Kernmodellen bis zu einer Dichte von ungefähr $4 \cdot 10^{10} \text{ g/cm}^3$ vorherrschen, keine Veränderung mit und ohne die Erweiterungen des BPS-Modells gibt. Die atomare Bindungsenergie ist nur von der Ladungszahl Z abhängig. Daher bleibt der Anteil an der Gesamtenergiedichte auch für große Dichten nahezu konstant, so dass deren Bedeutung gegenüber den anderen Erweiterungen abnimmt. Somit wird das Vorgehen gerechtfertigt, die atomare Bindungsenergie nur bei den Audi-Wapstra-Daten herauszurechnen.

Die Ursache für den im vorangehenden Abschnitt diskutierten großen Einfluss der Gitterenergie auf die Sequenzen kann bei einem maximalen Anteil von $\sim 10^{-4}$ wohl kaum in der Energiedichte zu finden sein. Auch die erkennbaren Auswirkungen des Gitters auf die Zustandsgleichung im Bereich geringer Dichten (siehe Abb. 5.4) können nicht über die Energiedichten erklärt werden, da diese hier sogar besonders klein sind. Ein anderes Bild erhält man, wenn man sich den Anteil des Gitterdrucks am Gesamtdruck anschaut, was in Abb. 5.8 dargestellt ist.

Der größte Beitrag zum Druck ist der Elektronendruck P_e , die Kerne selber erzeugen keinen Druck. In dieser Hinsicht ähnelt die äußere Kruste nicht akkretierender kalter Neutronensterne den weißen Zwergen, bei denen ebenfalls die Energiedichte durch die Atomkerne dominiert und der Druck durch ein freies Elektronengas er-

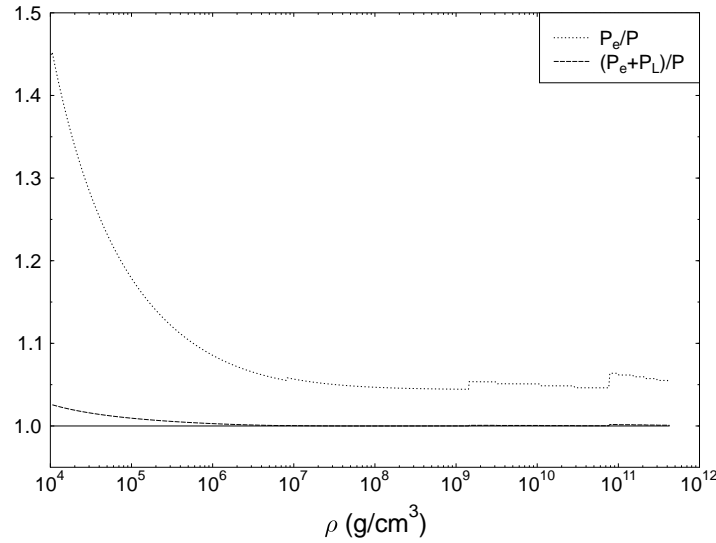


Abbildung 5.8: Der Anteil des Elektronendrucks P_e und der Summe aus Elektronen- und negativem Gitterdruck $P_e + P_L$ am Gesamtdruck P , berechnet für das Modell BSk8.

zeugt wird. Eine detaillierte Abhandlung einfacher Modelle für weiße Zwerge und entsprechende Rechnungen für die Masse-Radius-Beziehung sind in [SHGS06] zu finden.

Der negative Gitterdruck P_L erreicht im nichtrelativistischen Bereich einen Anteil von über 40 % am Gesamtdruck. Dies ist dadurch zu erklären, dass die Elektronen als freies Fermigas im nichtrelativistischen Bereich nur einen relativ geringen Druck erzeugen. Der Gitterdruck ist durch $1/3 W_L n_N$ gegeben, wächst also wie $n_N^{4/3}$. Für ein nichtrelativistisches Fermi-Gas gilt hingegen $P_e \propto n_N^{5/3}$, so dass der Elektronendruck schneller anwächst, als der Druck des Gitters. Somit ist der im Bereich geringer Dichte besonders große Anteil des Gitterdrucks für die veränderte Zustandsgleichung in Abb. 5.2 verantwortlich. Ab einer Dichte von ungefähr 10^7 g/cm^3 sind die Elektronen als relativistisch zu betrachten, und es gilt $P_e \propto n_N^{4/3}$, was zu dem konstanten Verhältnis von P_e zu P_L von ungefähr 5 % führt. Das Gitter ist demnach deswegen von so entscheidender Bedeutung für die Sequenz, weil es einen nicht vernachlässigbaren Beitrag zum Gesamtdruck erzeugt.

Der fehlende Anteil von $(P_e + P_L)/P$ zum Gesamtdruck im nichtrelativistischen Bereich in Abb. 5.8 wird durch den Druck der Terme höherer Ordnung erzeugt. Dies ist im Einklang mit der Erkenntnis aus dem vorangehenden Abschnitt, dass die Erweiterungen nur im Bereich geringer Dichte Auswirkungen auf die Zustandsgleichung haben. Der Druck der Erweiterungen ist hier negativ, so dass der Gesamtdruck bei nahezu unveränderter Dichte geringer ausfällt, als ohne die Terme höherer Ordnung.

Durch $P_e \propto n_N^{5/3}$ im nichtrelativistischen Fall erklärt sich der Anfangswert von $5/3$ des adiabatischen Index ohne Gitter. Da der negative Gitterdruck hingegen mit $n_N^{4/3}$ anwächst, wird ersichtlich, wieso der adiabatische Index mit Gitter größer als ohne ist: mit abnehmender Dichte wird der negative Anteil von P_L immer größer, so dass die Steigung, und damit der adiabatische Index, anwächst.

5.3.1 Erweiterungen

Im folgenden sollen die einzelnen Beiträge zu den Erweiterungen des BPS-Modells, also die Screening-Energie W_{Sc} , die Austauschenergie W_{Ex} , die Nullpunktsenergie W_{zp} sowie die atomare Bindungsenergie B_{el} genauer betrachtet und mit der Gitterenergie W_L verglichen werden. Abb. 5.9 zeigt hierzu die Anteile der verschiedenen Energien an der Gitterenergie W_L und die zugehörigen Abschätzungen aus Abschnitt 2.2.

Bei geringen Dichten stellt die atomare Bindungsenergie mit einem Anteil von über 50 % der Gitterenergie die größte Einzelkorrektur dar. Die Gitterenergie steigt jedoch wie gezeigt mit $n_N^{4/3}$ rasch an, im Gegensatz zur atomaren Bindungsenergie, die nur mit n_N anwächst, so dass deren Anteil schnell verschwindend gering wird. BPS rechtfertigten in ihrer Arbeit [BPS71] die Nichtverwendung von atomarer Bindungsenergie und Screening-Energie mit dem Argument, dass diese die gleiche Z -Abhängigkeit zeigen würden und von gleicher Größenordnung, aber entgegengesetztem Vorzeichen seien. Betrachtet man Abb. 5.9, so ist diese Argumentation nachvollziehbar, allerdings wird sichtbar, dass nur für mittlere Dichten eine gute Übereinstimmung der beiden Größen vorhanden ist. Für geringe Dichten ist die atomare Bindungsenergie deutlich größer: zu Beginn der Rechnung ist $W_{Sc}/B_{el} \approx 0,40$ und stimmt damit gut mit der Abschätzung aus Glg. (2.38) überein, die einen Wert von 0,39 vorhersagt.

Der Anteil der Screening-Energie bleibt für große Dichten ($\rho > 10^7 \text{ g/cm}^3$) nahezu konstant bei 5 %. Sie konvergiert so schnell gegen die relativistische Abschätzung $0,5 \cdot Z^{2/3}\alpha$ (siehe Glg. (2.40)), die nur noch von Z abhängt, dass die Abschätzung und die volle Rechnung in Abb. 5.9 kaum noch voneinander zu unterscheiden sind. Im nichtrelativistischen Bereich ist ebenfalls Konsistenz zwischen Näherung (gepunktete rote Linie) und ungenäherter numerischer Rechnung (durchgezogene rote Linie) festzustellen. Auch bei der Austauschenergie W_{Ex} ist die Konvergenz der vollen Rechnung gegen die Näherungen aus Glg. (2.45) schön zu erkennen. Im nichtrelativistischen Bereich hat die Austauschenergie das gleiche Vorzeichen wie die Screening-Energie, ist aber ungefähr viermal kleiner. Bei einer Dichte von $\rho \simeq 4 \cdot 10^7 \text{ g/cm}^3$ findet der erwähnte Vorzeichenwechsel statt. Anschließend vermindert die Austauschenergie mit einem nahezu konstanten Anteil an der Gitterenergie von ca. 2 % die Wirkung der Screening-Energie.

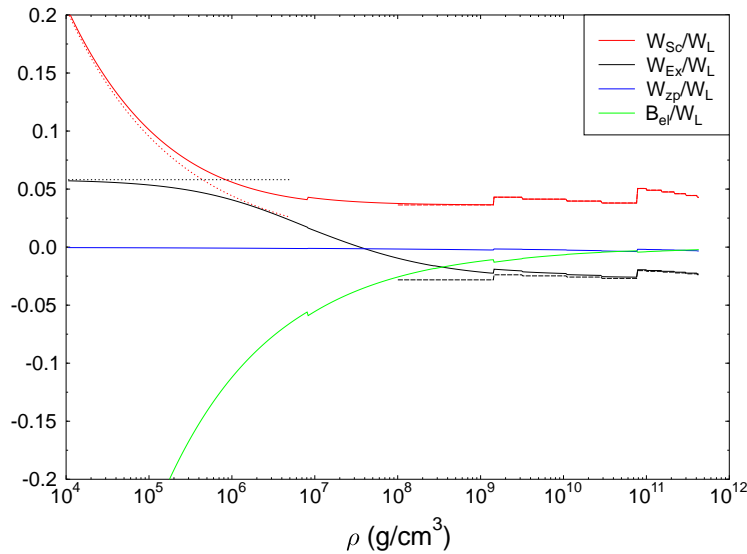


Abbildung 5.9: Das Verhältnis von Screening-Energie W_{Sc} , Austauschenergie W_{Ex} , Nullpunktsenergie W_{zp} und atomarer Bindungsenergie B_{el} zur Gitterenergie W_L , berechnet für die Massentabelle BSk8. Gepunktete Kurven stellen die nichtrelativistischen und gestrichelte die relativistischen Abschätzungen für W_{Sc} und W_{Ex} (Glg. (2.40) und (2.45)) aus Abschnitt 2.2 dar.

Betrachtet man die Summe von Austausch- und Screening-Energie (die Energie der Nullpunktsbewegung ist vernachlässigbar klein) ist eine noch größere gegenseitige Aufhebung der Erweiterungen festzustellen, als dies nur für die Screening- und atomare Bindungsenergie der Fall ist. Insofern hatten BPS mit ihrer Näherung eine Genauigkeit erreicht, die sie aus ihrer Begründung heraus gar nicht erwarten konnten.

Das Verhältnis von der Energie der Nullpunktsbewegung der Kerne zur Gitterenergie erreicht nur einen maximalen Wert von $4 \cdot 10^{-3}$. Auf die Berücksichtigung der Nullpunktsenergie für die Berechnung der äußeren Kruste hätte somit verzichtet werden können. Auf der anderen Seite werden somit die Aussagen aus Abschnitt 2.3.1 numerisch bestätigt, dass die Auslenkungen der Kerne aus der Ruhelage vernachlässigbar klein sind, und dass das Gitter daher (in dieser Hinsicht) absolut stabil ist.

Kapitel 6

Masse, Radius und Zusammensetzung

Die Masse und der Radius sind wichtige beobachtbare Eigenschaften von Neutronensternen. Würde es gelingen, diese beiden Größen eines einzelnen Neutronensterns experimentell exakt zu bestimmen, so könnten eine Vielzahl von Zustandsgleichungen ausgeschlossen, und somit fundierte neue Erkenntnisse über die Eigenschaften hochdichter Materie gewonnen werden. In dieser Hinsicht ist es interessant, die Auswirkungen der äußeren Kruste auf die Masse-Radius-Beziehung zu untersuchen. Die nun folgende Diskussion wird sich mit dieser Thematik beschäftigen.

6.1 Theorie

Für die Berechnung der Masse und des Radius eines kompakten Sterns wird die so genannte Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung benötigt. Diese beschreibt die Struktur eines Sterns ausgehend von der Grundgleichung der Allgemeinen Relativitätstheorie, der Einstein-Gleichung:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} . \quad (6.1)$$

In der Allgemeinen Relativitätstheorie führt jede Masse, die in obiger Gleichung durch den Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ repräsentiert wird, zu einer Krümmung des Raumes. Diese Krümmung wird wiederum durch den Einstein-Tensor $G_{\mu\nu}$ ausgedrückt. Die Lösung dieser auf den ersten Blick recht einfach aussehenden Gleichung ist jedoch hochgradig nichttrivial und führt im allgemeinen Fall auf ein System von zehn nichtlinearen, gekoppelten, partiellen Differentialgleichungen, das nur unter bestimmten Randbedingungen lösbar ist. 1939 fanden sowohl J. R. Oppenheimer und

G. M. Volkoff [OV39] als auch R. C. Tolman [Tol39] die Lösung für das hydrostatische Gleichgewicht im Inneren eines isotropen, sphärischen Sterns:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)m(r)}{c^2 r^2} \left[1 + \frac{P(r)}{\epsilon(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)c^2} \right] \left[1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right]^{-1}. \quad (6.2)$$

Für eine detaillierte Herleitung dieser so genannten Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung (TOV-Glg.), sei auf Literatur zur Allgemeinen Relativitätstheorie verwiesen, z. B. [Wei72, ST83].

Der erste Faktor in Glg. (6.2) entspricht dem Druckgleichgewicht zwischen der Gravitation einer Kugelschale mit Dicke dr , und dem inneren Druck $P(r)$ der darunter liegende Sphäre mit Masse $m(r)$ und Radius r in Newtonscher Mechanik. Die Energiedichte ist dabei äquivalent zur relativistischen Massendichte $\epsilon(r) = c^2 \rho(r)$; G bezeichnet die Gravitationskonstante.

Als Erweiterungen zum Newtonschen Fall enthält Glg. (6.2) drei Korrekturfaktoren der Allgemeinen Relativitätstheorie. Alle drei Faktoren sind größer als eins und verstärken somit die Wirkung der Newtonschen Gravitation. Die Größe der Korrekturen wird dabei durch den dimensionslosen Faktor $2Gm/c^2 r$ bestimmt. Wird dieser Faktor 1, so führt dies zu einer Singularität in Glg. (6.2). Der in diesem Fall zur Gesamtmasse M des Sterns korrespondierende Radius wird als der „Schwarzschildradius“ bezeichnet:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}. \quad (6.3)$$

Der Schwarzschildradius ist ein Maß für die Kompaktheit und Relativität eines Sterns und taucht in vielen Zusammenhängen, die aus der Allgemeinen Relativitätstheorie abgeleitet werden (z. B. in Glg. (1.14) und (4.11)), auf. Des Weiteren würde jedes Objekt mit kleinerem Radius als R_S unabhängig von seiner Zusammensetzung unter seiner eigenen Gravitation sofort zu einem schwarzen Loch kollabieren. Das Verhältnis aus Schwarzschildradius und Radius eines Objekts R_S/R kann daher nie größer als eins werden.

Ist R_S/R groß, so reicht die Beschreibung durch Newtonsche Gravitation nicht mehr aus, und Korrekturen der Allgemeinen Relativitätstheorie müssen berücksichtigt werden. Für die Masse der Sonne erhält man einen Schwarzschildradius von $\sim 2,953$ km. Mit einem Radius von ~ 700.000 km ist das Verhältnis R_S/R verschwindend gering. Neutronensterne mit vergleichbarer Masse besitzen einen Radius von ungefähr 10 km mit $R_S/R \approx 0,3$, so dass für diese die allgemein-relativistische Beschreibung durch Glg. (6.2) notwendig wird.

Zusätzlich zu Glg. (6.2) wird eine zweite Strukturgleichung benötigt, welche die Änderung der Masse mit dem Radius beschreibt:

$$\frac{dm}{dr} = \frac{4\pi r^2 \epsilon(r)}{c^2}. \quad (6.4)$$

Diese kann in Newtonscher Mechanik einfach abgeleitet werden, und behält auch in der Allgemeinen Relativitätstheorie ihre Gültigkeit.

Um Glg. (6.2) und (6.4) verwenden zu können, wird zusätzlich noch der Zusammenhang zwischen Druck und Energiedichte (also die Zustandsgleichung) benötigt. Liegt die Zustandsgleichung in expliziter Form vor, so kann ausgehend von einer Anfangsmasse M_0 , einem Anfangsdruck P_0 und einem Anfangsradius r_0 der Gesamtradius R und die Gesamtmasse M berechnet werden: Die beiden Gleichungen werden dabei (z. B. mit dem so genannten „Runge-Kutta-Verfahren“) numerisch integriert, bis ein vorgegebener minimaler Druck P_{min} erreicht wird. Für Neutronensterne wird üblicherweise im Zentrum (also bei $M_0 = 0$ und $r_0 = 0$) begonnen, und integriert, bis der Druck verschwindet: $P_{min} = 0$.

Die Strukturgleichungen erlauben aber auch die Verwendung nicht verschwindender Anfangswerte des Radius' und der Masse. So ist es möglich, die äußere Kruste für gegebene innere Masse und Radius zu berechnen, ohne dass dabei Informationen über die Zusammensetzung oder die Zustandsgleichung des inneren Bereichs benötigt werden.

Wie auch in der vorliegenden Rechnung für die äußere Kruste, ist die Zustandsgleichung oft nur in tabellarischer Form gegeben. In solchen Fällen wird über lineare Interpolation für einen gegebenen Druck die korrespondierende Energiedichte bestimmt. Als P_{min} wird der kleinste in der Tabelle verzeichnete Druck gewählt, der im Fall der äußeren Kruste den Übergang zur nur wenigen Zentimeter dicken Atmosphäre darstellt.

6.2 Abhängigkeit von der Zustandsgleichung

In Abb. 6.1 ist das Druck- und Dichteprofil der äußeren Kruste eines nicht akkretierenden kalten Neutronensterns dargestellt. Der Bereich dieses Neutronensterns innerhalb der äußeren Kruste (also der Kern zusammen mit der inneren Kruste) ist $R_0 = 12$ km und besitzt eine Masse von $M_0 = 1,4 M_\odot$. Für den Anfangsdruck P_0 wird zur besseren Vergleichbarkeit der Zustandsgleichungen ein einheitlicher Wert von $6,6 \cdot 10^{29}$ dyne/cm² und nicht der exakte Druck bei Erreichen des Neutronen-Drips verwendet, da dieser von Massentabelle zu Massentabelle leicht variiert.

Es werden vier verschiedene Zustandsgleichungen betrachtet: Eine Rechnung weder mit Gitter noch mit Erweiterungen, eine Zustandsgleichung nur mit Gitter, sowie jene mit Gitter und mit Erweiterungen für die Massentabelle BSk8. Zusätzlich wird die Zustandsgleichung inklusive Gitter und Erweiterungen von SkM* betrachtet, um die Auswirkungen der verschiedenen Massentabellen studieren zu können.

Wie zu erwarten, verhalten sich alle vier Kurven sehr ähnlich. Sowohl die Dichte,

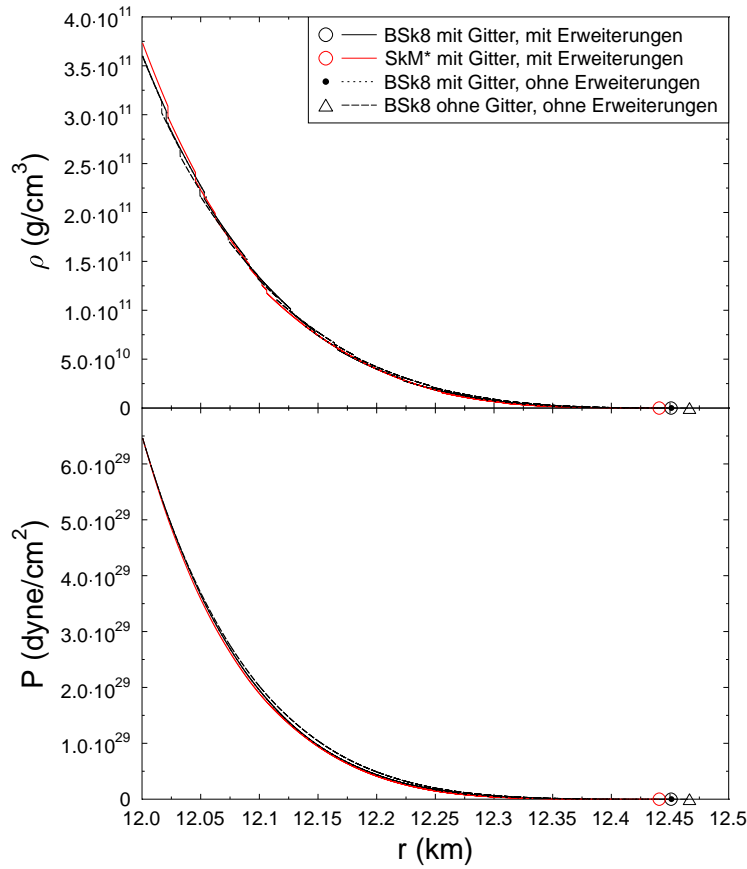


Abbildung 6.1: Der Druck P und die Massendichte ρ in Abhängigkeit vom Radius r für die äußere Kruste eines nicht akkretierenden kalten Neutronensterns mit Radius $R_0 = 12$ km und Masse $M_0 = 1,4 M_\odot$ des inneren Bereichs (Kern zusammen mit innerer Kruste), für vier verschiedene Zustandsgleichungen. Der Anfangsdruck der Rechnungen ist $P_0 = 6,6 \cdot 10^{29}$ dyne/cm².

als auch der Druck, fallen über die ersten 200 Meter der äußeren Kruste rasch ab. Der sich anschließende Randbereich der letzten 200 Meter weist nur noch geringe Dichten und Drücke auf. Hier geht der Druck- und Dichteabfall nur noch langsam vonstatten, bis nach etwa 450 Metern die äußere Kruste endet. Zwischen den verschiedenen Zustandsgleichungen sind nur im Detail Unterschiede zu erkennen. So fällt der Druck bei SkM* etwas schneller ab als bei den anderen Modellen. Der Druck von BSk8 mit Gitter liegt etwas oberhalb von SkM*. BSk8 ohne Gitter ist ein wenig von den anderen Modellen separiert. Auch bei den Dichten gibt es nur geringe Abweichungen der vier Zustandsgleichungen, die von ähnlicher Größenordnung wie bei den Drücken sind. Im Gegensatz zum stetig verlaufenden Druck finden sich im Dichteprofil die Dichtesprünge wieder, die bereits in Abschnitt 2.1.5 diskutiert wurden.

Zustandsgleichung	ΔM ($10^{-5} M_{\odot}$)	ΔR (km)
Bsk8 mit Gitter, mit Erweiterungen	3,09028	0,4509
SkM* mit Gitter, mit Erweiterungen	3,08839	0,4408
Bsk8 mit Gitter, ohne Erweiterungen	3,09029	0,4512
Bsk8 ohne Gitter, ohne Erweiterungen	3,09281	0,4666

Tabelle 6.1: Die Masse ΔM und die Dicke ΔR der äußeren Kruste eines nicht akkretierenden kalten Neutronensterns mit Radius $R_0 = 12$ km und Masse $M_0 = 1,4 M_{\odot}$ des inneren Bereichs (Kern zusammen mit innerer Kruste), für vier verschiedene Zustandsgleichungen. Der Anfangsdruck der Rechnungen ist $P_0 = 6,6 \cdot 10^{29}$ dyne/cm².

Der unterschiedlich schnelle Druckabfall der vier Zustandsgleichungen resultiert in verschiedenen Dicken der äußeren Kruste. Diese sind zusammen mit den zugehörigen Massen in Tabelle 6.1 angegeben. Mit 441 m ergibt sich aus der Zustandsgleichung SkM* die dünnste Kruste. Bsk8 mit Gitter liefert eine Dicke von 451 m, wobei die Einbeziehung der Erweiterungen nur eine Abnahme um drei Zentimeter zur Folge hat. Mit Bsk8 ohne Gitter findet man eine äußere Kruste von 467 m Dicke. Der maximale Unterschied in der Ausdehnung der äußeren Kruste für die hier untersuchten Zustandsgleichungen liegt somit bei 26 m zwischen den Modellen Bsk8 ohne Gitter und SkM*. Verglichen mit dem Radius eines Neutronensterns von 10 bis 20 km ist diese Differenz sehr gering. Insofern sind die hier betrachteten Auswirkungen der Zustandsgleichungen auf die Masse-Radius-Beziehung von untergeordneter Rolle. Es ist jedoch überraschend, dass allein die verschiedenen Massentabellen von Bsk8 und SkM* für die gleiche Rechnung zu einem Radius-Unterschied von zehn Metern führen, und damit die unterschiedlichen Vorhersagen der Massentabellen beinahe so wichtig sind, wie die Miteinbeziehung des Gitters.

Die äußeren Krusten in Tabelle 6.1 beinhalten nur einen Anteil von ungefähr 10^{-5} der Gesamtmasse des Neutronensterns. Die äußere Kruste trägt also im Wesentlichen nur zum Radius, aufgrund der geringen Dichte aber nur wenig zur Gesamtmasse des Neutronensterns bei. Die relativen Unterschiede der Massen fallen geringer als jene der Radien aus.

6.3 Abhängigkeit vom inneren Bereich

Nachdem die Auswirkungen des Gitters, der Erweiterungen und der Massentabellen auf die Zustandsgleichung betrachtet wurden, soll im Folgenden die Abhängigkeit

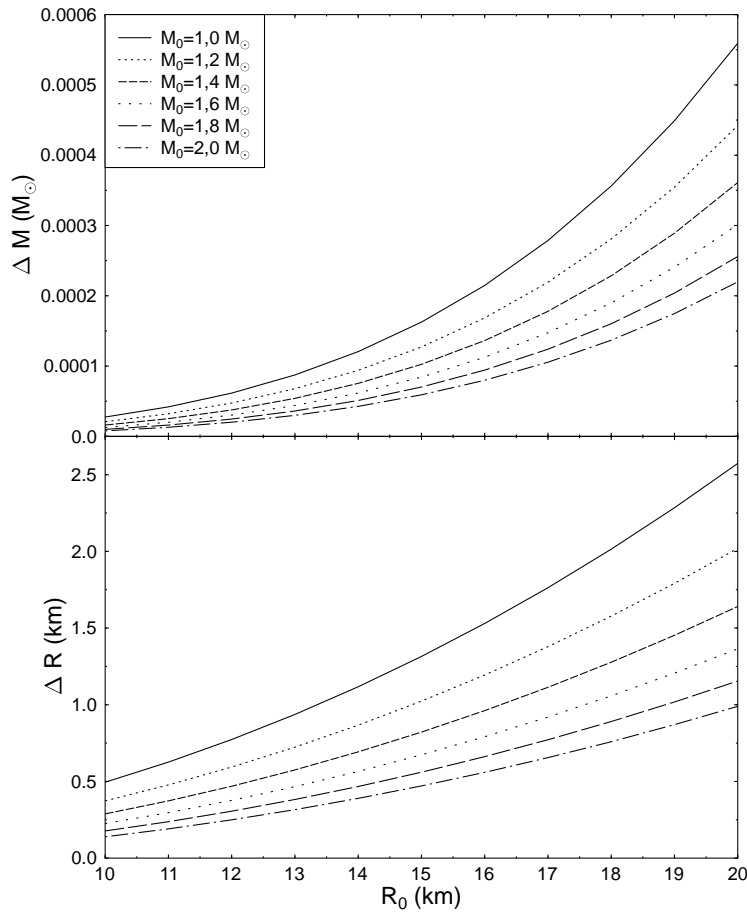


Abbildung 6.2: Die Masse ΔM und die Dicke ΔR der äußeren Kruste in Abhängigkeit vom inneren Radius R_0 für verschiedene innere Massen M_0 , berechnet für die Massentabelle FRDM. Der Anfangsdruck der äußeren Kruste ist $P_0 = 7,9 \cdot 10^{29}$ dyne/cm².

der Masse und der Dicke der äußeren Kruste vom Radius R_0 und der Masse M_0 des inneren Bereichs analysiert werden. Hierzu wird die zur Massentabelle FRDM gehörende Zustandsgleichung mit allen Erweiterungen höherer Ordnung verwendet. Als Initialdruck für den Beginn der äußeren Kruste wird ein Wert von $7,9 \cdot 10^{29}$ dyne/cm² gewählt, der unmittelbar vor Erreichen des Neutronen-Drips liegt. Abb. 6.2 zeigt die Ergebnisse für Anfangsmassen von $M_0 = 1,0 - 2,0 M_\odot$ und Anfangsradien von $R_0 = 10 - 20$ km.

Sowohl die Masse als auch die Dicke der äußeren Kruste nehmen für alle Anfangsmassen mit dem Radius des inneren Bereichs zu. Demgegenüber haben Neutronensterne mit großem M_0 kleinere und leichtere äußere Krusten. Die Massen erstrecken sich für die betrachteten Werte von R_0 und M_0 von $\Delta M = 7,8 \cdot 10^{-6}$ bis $5,6 \cdot 10^{-4} M_\odot$,

M_0 (M_\odot)	R_0 (km)	ΔR (km)	$\Delta R/(R + \Delta R)$ (%)
1,0	10	0,49	4,7
1,0	20	2,57	11,4
1,4	10	0,29	2,8
1,4	20	1,64	7,6
2,0	10	0,14	1,4
2,0	20	0,99	4,7

Tabelle 6.2: Die Dicke ΔR der äußeren Kruste und ihr Anteil am Gesamtradius $\Delta R/(R + \Delta R)$ für vier verschiedene Neutronensterne.

die Radien von 0,14 bis 2,57 km. In Tabelle 6.2 sind die Dicken der äußeren Krusten und deren Anteil am Gesamtradius für sechs verschiedene Neutronensterne aufgeführt. Der radiale Anteil der äußeren Kruste ist bei Neutronensternen mit geringer Masse und großen Radien besonders groß. Für den Fall $M_0 = 1,0 M_\odot$ umfasst die äußere Kruste zwischen 4,7 und 11,4 % der Ausdehnung des Neutronensterns, für $M_0 = 2,0 M_\odot$ zwischen 1,4 und 4,7 %. Zusammenfassend kann also gesagt werden, dass die äußere Kruste umso leichter und kleiner wird, desto kompakter der Neutronenstern ist.

6.4 Zusammensetzung

Nachdem gezeigt wurde, dass einerseits die Wahl der Zustandsgleichung nur einen unerheblichen Einfluss auf die Masse und den Radius der äußeren Kruste hat, andererseits aber die Dicke der Kruste entscheidend von der Kompaktheit des Neutronensterns abhängt, soll nun die Zusammensetzung der äußeren Kruste für verschiedene Neutronensterne mit unterschiedlichen Zustandsgleichungen untersucht werden. Hierzu ist in Abb. 6.3 zum einen die Verteilung des Anteils der Kerne mit Massenzahl A und zum anderen der Kerne mit Ladungszahl Z an der Gesamtzahl aller Kerne der Kruste N_{tot} für drei verschiedene Zustandsgleichungen dargestellt. Es wurden zwei der Topmodelle, FRDM und NL3def, sowie das exotischere Modell Chiralp ausgewählt.

Bei FRDM und NL3def werden in der bimodalen Verteilung der Nuklide um $A = 80$ und $A = 120$ die Sequenzen entlang der magischen Zahlen $N = 50$ und $N = 82$ sichtbar. Betrachtet man die Zusammensetzungen aller drei Zustandsgleichungen, so ist Folgendes festzustellen: obwohl Eisen über einen großen Dichtebereich der Zustandsgleichung den Grundzustand darstellt, ist es nur in winzig kleinen

Zustandsgleichung	$\langle A \rangle$	$\langle Z \rangle$
FRDM	108,3	36,0
NL3def	105,7	34,5
Chiralp	104,8	34,0

Tabelle 6.3: Die mittlere Massenzahl $\langle A \rangle$ und Ladungszahl $\langle Z \rangle$ der Kerne der äußeren Kruste eines Neutronensterns mit $M_0 = 1,4 M_\odot$ und $R_0 = 10$ km, berechnet mit drei verschiedenen Zustandsgleichungen.

Mengen in der äußeren Kruste vorhanden. Der Grund hierfür ist, dass Eisen nur bei den niedrigsten Dichten vorliegt. Für das Modell FRDM wurde beispielsweise ein Anteil von nur $1,45 \cdot 10^{-6}$ ermittelt. Auf der anderen Seite sind Nuklide, die bei großen Dichten in der Sequenz auftauchen, natürlicherweise mit großen Anteilen vertreten. Obwohl aus allen drei Kernmodellen bis zu einer Dichte von $3 \cdot 10^{10} \text{ g/cm}^3$ die gleiche Zustandsgleichung hervorgeht, gibt es daher doch bedeutende Unterschiede in den Gesamtzusammensetzungen. So können auch Kerne, die nur selten als Grundzustandskerne auftreten, einen signifikanten Anteil beitragen, wie z. B. ^{156}Pd , der letzte Kern der Sequenz im chiralen Modell. Diese Resultate machen deutlich, dass Unterschiede der Sequenzen in den Zusammensetzungen verstärkt zu Tage treten können.

In Tabelle 6.3 werden die mittleren Massen- und Ladungszahlen der äußeren Krusten, die mit den drei Zustandsgleichungen berechnet wurden, angegeben. Hier findet man relativ ähnliche Werte, es handelt sich im Mittel um Selen- ($Z = 34$) oder Krypton-Kerne ($Z = 36$) mit den mittleren Massenzahlen 105 – 108.

Die Anteile in Abb. 6.3 wurden für zwei verschiedene Anfangskonfigurationen berechnet, zum einen für einen relativ kompakten Neutronenstern mit $M_0 = 1,4 M_\odot$ und $R_0 = 10$ km, und zum anderen für einen weniger kompakten mit $M_0 = 1,0 M_\odot$ und $R_0 = 20$ km. Obwohl sich die Dicke der äußeren Kruste dieser beiden Neutronensterne deutlich unterscheidet (siehe Abb. 6.2), sind für alle Zustandsgleichungen die Verteilungen der Anteile beinahe unverändert. Das bedeutet, dass alle existierenden nicht akkretierenden kalten Neutronensterne, unter den gemachten idealisierenden Annahmen, bis in den Prozentbereich genau die gleiche Krusten-Zusammensetzung besitzen. Dies gilt nur, wenn der absolute Grundzustand der äußeren Kruste tatsächlich erreicht wird. Auch für nicht akkretierende kalte Neutronensterne sind Abweichungen denkbar, z. B. wenn einzelne pyknonukleare Reaktionen, in denen die Grundzustandskerne der äußeren Kruste sukzessive gebildet werden, in zu großen Zeitskalen ablaufen.

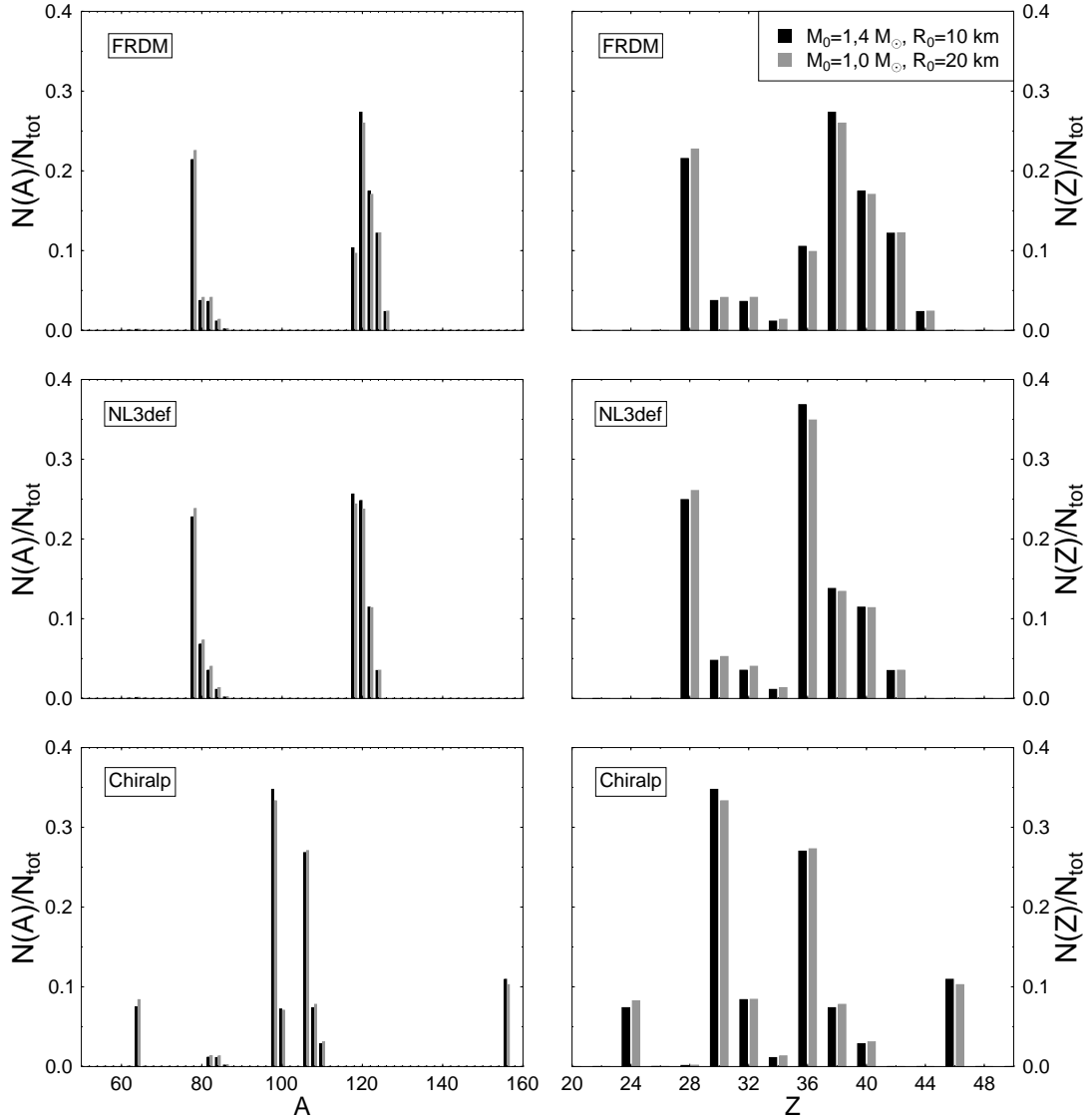


Abbildung 6.3: Verteilung des Anteils der Nuklide an der Gesamtzahl der Kerne in der äußeren Kruste N_{tot} in Abhängigkeit von der Massenzahl A (linke Seite) und der Protonenzahl Z (rechte Seite) für die Zustandsgleichungen FRDM, NL3def und Chiralp. Schwarze Balken zeigen die Ergebnisse für einen Neutronenstern mit $M_0 = 1,4 M_\odot$, $R_0 = 10$ km, graue für $M_0 = 1,0 M_\odot$, $R_0 = 20$ km. Die zugehörigen Krusten sind 288 bzw. 2.754 m dick und $1.61 \cdot 10^{-6}$ bzw. $5.59 \cdot 10^{-4} M_\odot$ schwer. Der Anfangsdruck der äußeren Kruste ist $P_0 = 7,9 \cdot 10^{29}$ dyne/cm².

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die äußere Kruste nicht akkretierender kalter Neutronensterne unter Verwendung des erweiterten BPS-Modells (Kapitel 2) und neuester nuklearer Daten studiert. Die berücksichtigten Erweiterungen des ursprünglichen BPS-Modells beinhalten die Screening- und die Austauschenergie, welche Korrekturen höherer Ordnung zur Gitter- und Elektronenenergie darstellen. Des Weiteren wurden Korrekturen durch die atomare Bindungsenergie und die Nullpunktsbewegung der Ionen angewandt.

Für die Bindungsenergien der Kerne wurde, wenn verfügbar, auf die experimentell bestimmten Massen aus dem Audi-Wapstra-Katalog [AWT03] zurückgegriffen, ansonsten die theoretischen Kernmodelle aus Kapitel 3 genutzt. Dies ist die erste Arbeit, die solch eine Vielzahl unterschiedlicher Kernmodelle hinsichtlich der Neutronen-Dripline, magischer Zahlen, der Zustandsgleichung, der Kernsequenzen und der Zusammensetzung der äußeren Kruste nicht akkretierender kalter Neutronensterne analysiert. Sowohl das 1971 von BPS verwendete, als auch die neueste Version des Tröpfchenmodells, FRDM, wurden untersucht. Bei den nichtrelativistischen Skyrme-Parametrisierungen wurden vier Massentabellen von Dobaczewski et al. und fünf von der BRUSLIB-Kollaboration verwendet, die jeweils auf unterschiedlichen Näherungen, Paarkräften und Fit-Prozeduren beruhen. Alle nichtrelativistischen Modelle berücksichtigten, wie FRDM auch, axialsymmetrische Deformationen. Des Weiteren fanden das erste Mal relativistische Kernmodelle zur Beschreibung der äußeren Kruste Verwendung. Hier wurden acht deformierte und zwei nicht deformierte Massentabellen mit und ohne Pairing in die Analyse miteinbezogen.

Folgende Resultate wurden in Kapitel 4 diskutiert: Die Zustandsgleichung und somit auch der adiabatische Index werden von geringen Unterschieden in der Sequenz nicht beeinflusst. Die mit den verschiedenen Massentabellen bestimmten Zustandsgleichungen sind daher nahezu identisch. Bei den Übergängen von einem Grundzustandskern zum nächsten kommt es bei konstantem Druck zu Unstetigkeiten der

Dichten, so dass der adiabatische Index an diesen Stellen null wird und somit die Zustandsgleichung aufweicht.

Die Sequenz von FRDM und ebenso die der meisten anderen Kernmodelle orientiert sich nach den Audi-Wapstra-Kernen entlang der magischen Neutronenzahlen $N = 50$ und $N = 82$ bis zum Erreichen der Dripline. Die nichtrelativistischen Modelle von BRUSLIB zeigen ebenfalls dieses Verhalten. Dabei sind nur geringe Unterschiede zwischen den Sequenzen und den Driplines der fünf verschiedenen Massentabellen festzustellen. Anders bei den nichtrelativistischen Modellen von Dobaczewski: Für SkM* und SkP werden ungewöhnliche Isotopen-Sequenzen entlang der Protonenzahl $Z = 28$ bzw. $Z = 30$ gefunden. SLy4 und SLy4HO liefern bis auf einen einzigen Kern identische Sequenzen, die wiederum denen von BRUSLIB ähneln. Aus diesen Resultaten folgte der Schluss, dass nicht die Details der Näherung, sondern die Fit-Prozedur der Kernmodelle für die Sequenz entscheidend ist. Die relativistischen Kernmodelle orientieren sich ebenfalls hauptsächlich entlang der magischen Neutronenzahlen $N = 50$ und $N = 82$. Nur beim chiralen Modell wird statt $N = 82$ die magische Zahl $N = 70$ gefunden. Der Endpunkt der Sequenz, der immer direkt auf der Dripline liegt, koinzidiert mit einem Bereich der Nuklidkarte, in dem die Dripline mit großer Übereinstimmung durch die Kernmodelle vorhergesagt wird. Für die fünf ausgewählten Massentabellen aus Abschnitt 4.2.6 liegt dieser letzte Kern ungefähr bei $Z = 36$ und $N = 82$.

Deformationen führen zu einem steileren und lineareren Verlauf der Dripline, da Schaleneffekte ausgeglichen werden. Auf die Sequenzen haben Deformationen nur einen geringen Einfluss, da hauptsächlich magische Kerne gefunden werden, die nur geringe Deformationen aufweisen. Das Pairing führt zu einer Glättung der Dripline. Des Weiteren werden durch das Pairing neue Energieniveaus erzeugt, die ein Aufsplitten der Dripline und der Sequenz bei $N = 80/82$ für das Modell PCF1 und bei $N = 68/70$ für das chirale Modell zur Folge haben.

In Kapitel 5 wurden zunächst die Auswirkungen der Erweiterungen im Detail betrachtet. Die Zustandsgleichung bleibt ohne Erweiterungen nahezu unverändert. Auch in den Sequenzen kommt es nur zu geringfügigen Veränderungen: Einzelne Kerne bei großem A und Z werden durch leichtere und schwächer geladene Nuklide ersetzt.

Als nächstes wurde die Bedeutung des Gitters diskutiert, welches im Falle noch nicht ausgekühlter oder akkretierender Neutronensterne schmelzen kann. Ohne Gitter wird der Druck in der Zustandsgleichung im Bereich niedriger Dichten geringfügig größer. Im adiabatischen Index wird dieses Verhalten verstärkt sichtbar. Für die Sequenzen ist das Gitter von entscheidender Bedeutung, da es einen nicht zu vernachlässigenden Beitrag zum Druck liefert. Ohne Gitter wird die Abhängigkeit von der Bindungsenergie erhöht und die von der Ladungszahl geschwächt, so dass stark gebundene Kerne mit geringem Z/A -Verhältnis bevorzugt auftreten.

Anschließend wurden die einzelnen Beiträge der Zustandsgleichung detailliert analysiert und unter anderem festgestellt, dass sich die Erweiterungen teilweise gegenseitig aufheben. Die Berechnung der Nullpunkts-Energie der Kerne zeigte, dass das Gitter stabil gegenüber der Nullpunktsbewegung der Kerne ist.

In Kapitel 6 wurden mit der TOV-Gleichung für gegebene Neutronensterne zunächst die Massen und Dicken der äußeren Kruste bestimmt. Für unterschiedliche Kernmodelle kommt es dabei zu Abweichungen von wenigen Prozent in der Dicke der äußeren Kruste, die Massen bleiben nahezu unverändert. Anschließend wurde die Abhängigkeit von der Masse und dem Radius des Neutronensterns studiert. Hier wurde gezeigt, dass die äußere Kruste umso leichter und kleiner wird, desto kompakter der Neutronenstern ist. Für $M_0 = 1,4 M_\odot$ werden typische Radien von 0,3 bis 1,6 km gefunden. Die Masse ist in der Größenordnung von $10^{-5} - 10^{-4} M_\odot$ und damit vernachlässigbar klein. Der radiale Anteil liegt demgegenüber zwischen 3 und 8 %, und wird ebenfalls mit der Kompaktheit des Neutronensterns geringer.

Abschließend wurde mit der TOV-Gleichung die Zusammensetzung der äußeren Kruste berechnet. Die Isotopen-Zusammensetzung ist wichtig für den Wärme-Transport vom Kern zur Oberfläche des Neutronensterns und für die Ohmsche Dissipation des magnetischen Feldes. Für die Massenzahl wurde eine bimodale Verteilung entsprechend den magischen Zahlen $N = 50$ und $N = 82$ festgestellt. Einzelne Nuklide können, wenn sie bei großen Dichten in der Sequenz auftreten, einen großen Anteil ausmachen. Andererseits ist Eisen, da es nur bei den geringsten Dichten vorliegt, mit verschwindend geringem Anteil vertreten. Je nach Kernmodell erhält man eine mittlere Ladungszahl von 34 bis 36 und eine mittlere Massenzahl von 105 bis 108. Hierbei wurde festgestellt, dass die Zusammensetzung der äußeren Kruste unabhängig von der Größe und Masse des Neutronensterns und somit universal für alle nicht akkretierenden kalten Neutronensterne ist.

Die Ergebnisse dieser Arbeit beruhen auf den Bindungsenergien neutronenreicher Isotope mit $Z = 26 - 40$ aus einem Bereich der Nuklidkarte, der in naher Zukunft mit FAIR an der GSI erforscht werden kann (siehe Abb. 1.9). Mit diesen zukünftigen Massenmessungen werden zum einen die theoretischen Kernmodelle hinsichtlich ihrer Isospin-Abhängigkeit hin zur Neutronen-Dripline stark eingeschränkt werden. Zum anderen wird es eventuell möglich sein, die tatsächliche Sequenz der Kerne in der äußeren Kruste nicht akkretierender kalter Neutronensterne abschließend zu bestimmen. Andere, extraterrestrische Informationen könnten von der Beobachtung binärer Röntgen-Systeme kommen, in denen ein Neutronenstern Materie von seinem stellaren Begleiter akkretiert. Mit den Röntgen-Satelliten Chandra, XMM-Newton und dem sich noch in der Entwicklung befindenden XEUS, ist eine detaillierte spektroskopische Analyse der dort auftretenden X-Ray-Bursts möglich. Hieraus können bedeutende Informationen über die Masse-Radius-Beziehung von Neutronensternen gewonnen werden, die wiederum direkt von der Zustandsgleichung dichter Materie abhängt.

Eine Erweiterung des BPS-Modells auf endliche Temperaturen würde neue Anwendungsgebiete eröffnen. Außer für die thermale Evolution der äußeren Kruste wäre die Zustandsgleichung dann auch ein wichtiger Bestandteil zur Beschreibung von Supernova-Explosionen oder Neutronenstern-Kollisionen. Auch die Fortsetzung der Zustandsgleichung über den Neutronen-Drip hinaus hin zu größeren Dichten wäre wünschenswert. Hier ergäbe sich die Möglichkeit sowohl die innere als auch die äußere Kruste mit einer einzigen Parametrisierung zu beschreiben. Das gleiche theoretische Modell könnte für die Bindungsenergien der Kerne und die nuklearen Felder des freien Neutronengases in der inneren Kruste verwendet werden. Neben der Erweiterung hinsichtlich der Temperatur und der Dichte könnte das BPS-Modell auch um den Freiheitsgrad der Seltsamkeit erweitert werden. Die Kerne würden dabei durch kleine Tröpfchen seltsamer Quarkmaterie ersetzt, die sich ebenfalls in einem Gitter anordnen. Anstelle der Kernmassen benötigte man in diesem Fall die Massen der Strangelets als Eingabeparameter. Hierfür wären Massenformeln für Tröpfchenmodelle seltsamer Quarkmaterie innerhalb des MIT-Bag-Modells geeignet [Mad94]. Dieses Vorgehen würde ein neues Konzept zur Beschreibung der äußeren Kruste seltsamer Neutronensterne darstellen.

Anhang A

Kernmodelle und Sequenzen

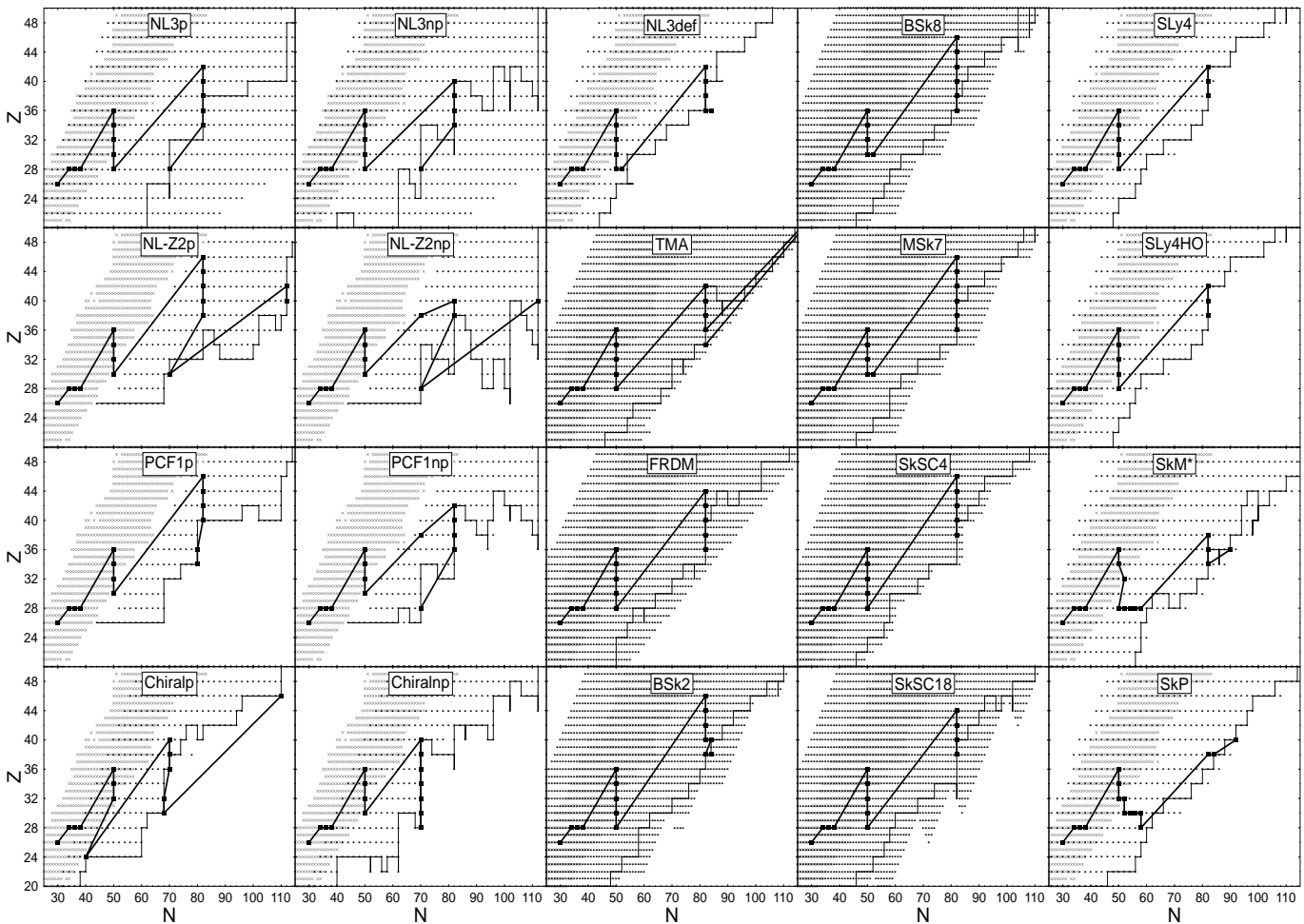


Abbildung A.1: Nuklidkarten aller verwendeten Kernmodelle (außer BPS). Punkte zeigen die in den Massentabellen verfügbaren Kerne; Linien die ermittelten Neutronen-Dripelines. Kreuze stellen die Kerne aus der atomaren Massentabelle [AWT03] dar. Linien mit Symbolen zeigen die jeweilige Sequenz der Grundzustandskerne, berechnet mit dem BPS-Modell und den in Kapitel 2.2 diskutierten Erweiterungen.

Anhang B

Sequenzen in tabellarischer Form

μ [MeV]	μ_e [MeV]	ρ_{\max} [g/cm ³]	P [dyne/cm ²]	n_b [cm ⁻³]	Element	Z	N
930,60	0,95	$8,09 \times 10^6$	$5,29 \times 10^{23}$	$4,88 \times 10^{30}$	⁵⁶ Fe	26	30
931,31	2,60	$2,69 \times 10^8$	$6,91 \times 10^{25}$	$1,62 \times 10^{32}$	⁶² Ni	28	34
932,00	4,24	$1,24 \times 10^9$	$5,20 \times 10^{26}$	$7,48 \times 10^{32}$	⁶⁴ Ni	28	36
933,33	7,69	$8,15 \times 10^9$	$5,78 \times 10^{27}$	$4,90 \times 10^{33}$	⁸⁴ Se	34	50
934,42	10,61	$2,23 \times 10^{10}$	$2,12 \times 10^{28}$	$1,34 \times 10^{34}$	⁸² Ge	32	50
935,48	13,58	$4,88 \times 10^{10}$	$5,70 \times 10^{28}$	$2,93 \times 10^{34}$	⁸⁰ Zn	30	50
937,68	19,97	$1,63 \times 10^{11}$	$2,68 \times 10^{29}$	$9,74 \times 10^{34}$	⁷⁸ Ni	28	50
937,78	20,25	$1,78 \times 10^{11}$	$2,84 \times 10^{29}$	$1,07 \times 10^{35}$	⁷⁶ Fe	26	50
937,83	20,50	$1,86 \times 10^{11}$	$2,93 \times 10^{29}$	$1,12 \times 10^{35}$	¹²⁴ Mo	42	82
938,57	22,86	$2,67 \times 10^{11}$	$4,55 \times 10^{29}$	$1,60 \times 10^{35}$	¹²² Zr	40	82
939,29	25,25	$3,73 \times 10^{11}$	$6,79 \times 10^{29}$	$2,23 \times 10^{35}$	¹²⁰ Sr	38	82
939,57	26,19	$4,32 \times 10^{11}$	$7,87 \times 10^{29}$	$2,59 \times 10^{35}$	¹¹⁸ Kr	36	82

Tabelle B.1: Die Sequenz an Grundzustandskernen in der äußeren Kruste nicht akkretierender kalter Neutronensterne, berechnet mit dem Kernmodell von Myers und Swiatecki [MS66] um die Ergebnisse von BPS [BPS71] zu reproduzieren. Die Werte sind für die Übergangspunkte zum Kern in der nachfolgenden Zeile gegeben, die letzte Zeile gehört zum Erreichen des Neutronen-Drip-Punktes.

μ_e [MeV]	ρ_{\max} [g/cm ³]	Element	Z	N
0,95	$7,96 \times 10^6$	⁵⁶ Fe	26	56
2,61	$2,70 \times 10^8$	⁶² Ni	28	34
4,17	$1,18 \times 10^9$	⁶⁴ Ni	28	36
6,94	$5,88 \times 10^9$	⁶⁸ Ni	28	40
9,12	$1,36 \times 10^{10}$	⁸⁴ Se	34	50
9,16	$1,40 \times 10^{10}$	⁷⁰ Ni	28	42
10,06	$1,93 \times 10^{10}$	⁷² Ni	28	44
10,86	$2,43 \times 10^{10}$	⁷⁸ Zn	30	48
13,24	$4,52 \times 10^{10}$	⁸⁰ Zn	30	50
13,58	$4,97 \times 10^{10}$	⁷⁶ Ni	28	48
16,51	$9,17 \times 10^{10}$	⁷⁸ Ni	28	50
18,04	$1,23 \times 10^{11}$	⁸⁰ Ni	28	52
19,38	$1,56 \times 10^{11}$	⁸² Ni	28	54
21,12	$2,07 \times 10^{11}$	⁸⁴ Ni	28	56
22,89	$2,70 \times 10^{11}$	⁸⁶ Ni	28	58
24,36	$3,33 \times 10^{11}$	⁸⁸ Ni	28	60
25,10	$3,77 \times 10^{11}$	¹³⁰ Zr	40	90
25,97	$4,25 \times 10^{11}$	¹³² Zr	40	92
26,26	$4,45 \times 10^{11}$	¹³⁴ Zr	40	94

Tabelle B.2: Die von Haensel, Zdunik und Dobaczewsk [HZD89] berechnete Sequenz. Die verwendeten nuklearen Massen stammen aus einer sphärischen Rechnung für den Parametersatz SkP von Dobaczewski, Flocard, und Treiner [DFT84].

μ_e [MeV]	ρ_{\max} [g/cm ³]	Element	Z	N
0,95	$7,96 \times 10^6$	⁵⁶ Fe	26	30
2,61	$2,70 \times 10^8$	⁶² Ni	28	34
4,28	$1,29 \times 10^9$	⁶⁴ Ni	28	36
4,57	$1,61 \times 10^9$	⁶⁶ Ni	28	38
5,32	$2,63 \times 10^9$	⁶⁸ Ni	28	40
6,21	$4,34 \times 10^9$	⁸⁰ Ge	32	48
9,69	$1,70 \times 10^{10}$	⁸² Ge	32	50
12,26	$3,59 \times 10^{10}$	⁸⁰ Zn	30	50
18,22	$1,23 \times 10^{11}$	⁷⁸ Ni	28	50
18,73	$1,41 \times 10^{11}$	⁷⁶ Fe	26	50
20,15	$1,83 \times 10^{11}$	¹²² Zr	40	82
22,19	$2,53 \times 10^{11}$	¹²⁰ Sr	38	82
24,24	$3,42 \times 10^{11}$	¹¹⁸ Kr	36	82
26,28	$4,55 \times 10^{11}$	¹¹⁶ Se	34	82
26,82	$5,05 \times 10^{11}$	¹¹⁴ Ge	32	82

Tabelle B.3: Die von Haensel, Zdunik, und Dobaczewski [HZD89] berechnete Sequenz, diesmal für ein Tröpfchenmodell von Myers [Mye77].

μ_e [MeV]	ρ_{\max} [g/cm ³]	Element	Z	N
0,95	$7,96 \times 10^6$	⁵⁶ Fe	26	30
2,61	$2,71 \times 10^8$	⁶² Ni	28	34
4,31	$1,30 \times 10^9$	⁶⁴ Ni	28	36
4,45	$1,48 \times 10^9$	⁶⁶ Ni	28	38
5,66	$3,12 \times 10^9$	⁸⁶ Kr	36	50
8,49	$1,10 \times 10^{10}$	⁸⁴ Se	34	50
11,44	$2,80 \times 10^{10}$	⁸² Ge	32	50
14,08	$5,44 \times 10^{10}$	⁸⁰ Zn	30	50
16,78	$9,64 \times 10^{10}$	⁷⁸ Ni	28	50
18,34	$1,29 \times 10^{11}$	¹²⁶ Ru	44	82
20,56	$1,88 \times 10^{11}$	¹²⁴ Mo	42	82
22,86	$2,67 \times 10^{11}$	¹²² Zr	40	82
25,38	$3,79 \times 10^{11}$	¹²⁰ Sr	38	82
26,19	$4,33 \times 10^{11}$	¹¹⁸ Kr	36	82

Tabelle B.4: Die von Haensel und Pichon berechnete Sequenz [HP94]. Oberer Teil: Verwendung von experimentellen Kernmassen, unterer Teil: Bindungsenergien aus der Massenformel von Möller und Nix [MN88]. Die letzte Zeile korrespondiert zum Erreichen des Neutronen-Drip.

μ_e [MeV]	ρ_{\max} [g/cm ³]	Element	Z	N
17,44	$1,08 \times 10^{11}$	⁷⁸ Ni	28	50
19,13	$1,47 \times 10^{11}$	¹²⁶ Ru	44	82
21,66	$2,20 \times 10^{11}$	¹²⁴ Mo	42	82
24,13	$3,15 \times 10^{11}$	¹²² Zr	40	82
26,05	$4,10 \times 10^{11}$	¹²⁰ Sr	38	82

Tabelle B.5: Wie Tabelle B.4, beginnend mit dem letzten experimentell bestimmten Kern. Für den unteren Teil wurde die Massenformel von Aboussir et al. [APDT92] verwendet.

μ [MeV]	μ_e [MeV]	ρ_{\max} [g/cm ³]	P [dyne/cm ²]	n_b [cm ⁻³]	Element	Z	N
930,60	0,95	$8,02 \times 10^6$	$5,22 \times 10^{23}$	$4,83 \times 10^{30}$	⁵⁶ Fe	26	30
931,32	2,61	$2,71 \times 10^8$	$6,98 \times 10^{25}$	$1,63 \times 10^{32}$	⁶² Ni	28	34
932,04	4,34	$1,33 \times 10^9$	$5,72 \times 10^{26}$	$8,03 \times 10^{32}$	⁶⁴ Ni	28	36
932,09	4,46	$1,50 \times 10^9$	$6,44 \times 10^{26}$	$9,04 \times 10^{32}$	⁶⁶ Ni	28	38
932,56	5,64	$3,09 \times 10^9$	$1,65 \times 10^{27}$	$1,86 \times 10^{33}$	⁸⁶ Kr	36	50
933,62	8,38	$1,06 \times 10^{10}$	$8,19 \times 10^{27}$	$6,37 \times 10^{33}$	⁸⁴ Se	34	50
934,75	11,43	$2,79 \times 10^{10}$	$2,85 \times 10^{28}$	$1,68 \times 10^{34}$	⁸² Ge	32	50
935,89	14,61	$6,07 \times 10^{10}$	$7,63 \times 10^{28}$	$3,65 \times 10^{34}$	⁸⁰ Zn	30	50
936,44	16,17	$8,46 \times 10^{10}$	$1,15 \times 10^{29}$	$5,08 \times 10^{34}$	⁸² Zn	30	52
936,63	16,81	$9,67 \times 10^{10}$	$1,32 \times 10^{29}$	$5,80 \times 10^{34}$	¹²⁸ Pd	46	82
937,41	19,16	$1,47 \times 10^{11}$	$2,23 \times 10^{29}$	$8,84 \times 10^{34}$	¹²⁶ Ru	44	82
938,12	21,35	$2,11 \times 10^{11}$	$3,45 \times 10^{29}$	$1,26 \times 10^{35}$	¹²⁴ Mo	42	82
938,78	23,47	$2,89 \times 10^{11}$	$5,05 \times 10^{29}$	$1,73 \times 10^{35}$	¹²² Zr	40	82
939,47	25,77	$3,97 \times 10^{11}$	$7,36 \times 10^{29}$	$2,38 \times 10^{35}$	¹²⁰ Sr	38	82
939,57	26,09	$4,27 \times 10^{11}$	$7,74 \times 10^{29}$	$2,56 \times 10^{35}$	¹¹⁸ Kr	36	82

Tabelle B.6: Sequenz der Grundzustandskerne in der äußeren Kruste unter Verwendung der experimentell bestimmten atomaren Massentabelle [AWT03] (oberer Teil), und dem nichtrelativistischen theoretischen Kernmodell BSk8 von BRUSLIB (unterer Teil). Die experimentellen Daten wurden immer bevorzugt verwendet, die letzte Zeile zeigt den Neutronen-Drip.

μ [MeV]	μ_e [MeV]	ρ_{\max} [g/cm ³]	P [dyne/cm ²]	n_b [cm ⁻³]	Element	Z	N
930,60	0,95	$8,02 \times 10^6$	$5,22 \times 10^{23}$	$4,83 \times 10^{30}$	⁵⁶ Fe	26	30
931,32	2,61	$2,71 \times 10^8$	$6,98 \times 10^{25}$	$1,63 \times 10^{32}$	⁶² Ni	28	34
932,04	4,34	$1,33 \times 10^9$	$5,72 \times 10^{26}$	$8,03 \times 10^{32}$	⁶⁴ Ni	28	36
932,09	4,46	$1,50 \times 10^9$	$6,44 \times 10^{26}$	$9,04 \times 10^{32}$	⁶⁶ Ni	28	38
932,56	5,64	$3,09 \times 10^9$	$1,65 \times 10^{27}$	$1,86 \times 10^{33}$	⁸⁶ Kr	36	50
933,62	8,38	$1,06 \times 10^{10}$	$8,19 \times 10^{27}$	$6,37 \times 10^{33}$	⁸⁴ Se	34	50
934,75	11,43	$2,79 \times 10^{10}$	$2,85 \times 10^{28}$	$1,68 \times 10^{34}$	⁸² Ge	32	50
935,93	14,71	$6,21 \times 10^{10}$	$7,86 \times 10^{28}$	$3,73 \times 10^{34}$	⁸⁰ Zn	30	50
937,28	18,64	$1,32 \times 10^{11}$	$2,03 \times 10^{29}$	$7,92 \times 10^{34}$	⁷⁸ Ni	28	50
937,63	19,80	$1,68 \times 10^{11}$	$2,55 \times 10^{29}$	$1,01 \times 10^{35}$	¹²⁴ Mo	42	82
938,13	21,38	$2,18 \times 10^{11}$	$3,48 \times 10^{29}$	$1,31 \times 10^{35}$	¹²² Zr	40	82
938,67	23,19	$2,89 \times 10^{11}$	$4,82 \times 10^{29}$	$1,73 \times 10^{35}$	¹²⁰ Sr	38	82
939,18	24,94	$3,73 \times 10^{11}$	$6,47 \times 10^{29}$	$2,23 \times 10^{35}$	¹¹⁸ Kr	36	82
939,57	26,29	$4,55 \times 10^{11}$	$8,00 \times 10^{29}$	$2,72 \times 10^{35}$	¹¹⁶ Se	34	82

Tabelle B.7: Wie Tabelle B.6, nun für das relativistische Modell TMA.

Literaturverzeichnis

- [AI75] ANDERSON, P. W. ; ITOH, N.: Pulsar glitches and restlessness as a hard superfluidity phenomenon. *Nature* 256 (1975), Juli, 25-27. [LINK](#)
- [Alf01] ALFORD, M.: Color-Superconducting Quark Matter. *Annual Review of Nuclear and Particle Science* 51 (2001), 131-160. [LINK](#)
- [APDT92] ABOUSSIR, Y. ; PEARSON, J. M. ; DUTTA, A. K. ; TONDEUR, F.: Thomas-Fermi approach to nuclear-mass formula (IV). The ETFSI-1 mass formula. *Nucl. Phys. A* 549 (1992), November, 155-179. [LINK](#)
- [APR98] AKMAL, A. ; PANDHARIPANDE, V. R. ; RAVENHALL, D. G.: Equation of state of nucleon matter and neutron star structure. *Phys. Rev. C* 58 (1998), September, 1804-1828. [LINK](#)
- [AW93] AUDI, G. ; WAPSTRA, A. H.: The 1993 atomic mass evaluation (I) Atomic mass table. *Nucl. Phys. A* 565 (1993), Dezember, 1-65. [LINK](#)
- [AW95] AUDI, G. ; WAPSTRA, A. H.: The 1995 update to the atomic mass evaluation. *Nucl. Phys. A* 595 (1995), Februar, 409-480. [LINK](#)
- [AWT03] AUDI, G. ; WAPSTRA, A. H. ; THIBAULT, C.: The Ame2003 atomic mass evaluation (II). Tables, graphs and references. *Nucl. Phys. A* 729 (2003), Dezember, 337-676. [LINK](#)
- [BB36] BETHE, H. A. ; BACHER, R. F.: Nuclear Physics A. Stationary States of Nuclei. *Reviews of Modern Physics* 8 (1936), April, 82-229. [LINK](#)
- [BB98] BROWN, E. F. ; BILDSTEN, L.: The Ocean and Crust of a Rapidly Accreting Neutron Star: Implications for Magnetic Field Evolution and Thermonuclear Flashes. *Astrophys. J.* 496 (1998), März, 915. [LINK](#)
- [BBP71] BAYM, G. ; BETHE, H. A. ; PETHICK, C. J.: Neutron star matter. *Nucl. Phys. A* 175 (1971), November, 225-271. [LINK](#)

- [BBS00] BALDO, M. ; BURGIO, G. F. ; SCHULZE, H.-J.: Hyperon stars in the Brueckner-Bethe-Goldstone theory. *Phys. Rev. C* 61 (2000), Mai, Nr. 5, 055801. [LINK](#)
- [BCS57] BARDEEN, J. ; COOPER, L. N. ; SCHRIEFFER, J. R.: Theory of Superconductivity. *Phys. Rep.* 108 (1957), Dezember, 1175-1204. [LINK](#)
- [Bel59] BELYAEV, S. T.: Effect of Pairing Correlations on Nuclear Properties. *Matematisk-fysiske Meddelelser* 31 11 (1959)
- [Ben97] BENDER, T.: *Exotische Atomkerne im Skyrme-Hartree-Fock-Modell*, Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main, Diss., 1997
- [BMMR02] BÜRVENICH, T. ; MADLAND, D. G. ; MARUHN, J. A. ; REINHARD, P.-G.: Nuclear ground state observables and QCD scaling in a refined relativistic point coupling model. *Phys. Rev. C* 65 (2002), April, Nr. 4, 044308. [LINK](#)
- [BMP58] BOHR, A. ; MOTTELSON, B. R. ; PINES, D.: Possible Analogy between the Excitation Spectra of Nuclei and Those of the Superconducting Metallic State. *Physical Review* 110 (1958), Mai, 936-938. [LINK](#)
- [Bod71] BODMER, A. R.: Collapsed Nuclei. *Phys. Rev. D* 4 (1971), September, 1601-1606. [LINK](#)
- [BP75] BAYM, G. ; PETHICK, C.: Neutron Stars. *Annual Review of Nuclear and Particle Science* 25 (1975), 27-77. [LINK](#)
- [BP79] BAYM, G. ; PETHICK, C.: Physics of neutron stars. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 17 (1979), 415-443. [LINK](#)
- [BPS71] BAYM, G. ; PETHICK, C. ; SUTHERLAND, P.: The Ground State of Matter at High Densities: Equation of State and Stellar Models. *Astrophys. J.* 170 (1971), Dezember, 299-317. [LINK](#)
- [BPZ⁺02] BECKMANN, C. ; PAPAZOGLU, P. ; ZSCHIESCHE, D. ; SCHRAMM, S. ; STÖCKER, H. ; GREINER, W.: Nuclei, superheavy nuclei, and hypermatter in a chiral SU(3) model. *Phys. Rev. C* 65 (2002), Februar, Nr. 2, 024301. [LINK](#)
- [BQB⁺82] BARTEL, J. ; QUENTIN, P. ; BRACK, M. ; GUET, C. ; HÅKANSSON, H.-B.: Towards a better parametrisation of Skyrme-like effective forces: A critical study of the SkM force. *Nucl. Phys. A* 386 (1982), September, 79-100. [LINK](#)

- [BRR⁺99] BENDER, M. ; RUTZ, K. ; REINHARD, P.-G. ; MARUHN, J. A. ; GREINER, W.: Shell structure of superheavy nuclei in self-consistent mean-field models. *Phys. Rev. C* 60 (1999), September, Nr. 3, 034304. [LINK](#)
- [BS02] BEDAQUE, P. F. ; SCHÄFER, T.: High-density quark matter under stress. *Nucl. Phys. A* 697 (2002), Januar, 802-822. [LINK](#)
- [BST66] BRUSH, S. G. ; SAHLIN, H. L. ; TELLER, E.: Monte Carlo Study of a One-Component Plasma. *J. Chem. Phys.* 45 (1966), 2102. [LINK](#)
- [BZ34a] BAADE, W. ; ZWICKY, F.: On Super-novae. *Proceedings of the National Academy of Science* 20 (1934), 254. [LINK](#)
- [BZ34b] BAADE, W. ; ZWICKY, F.: Supernovae and Cosmic Rays. *Phys. Rev.* 45 (1934), 138. [LINK](#)
- [CBH⁺97] CHABANAT, E. ; BONCHE, P. ; HAENSEL, P. ; MEYER, J. ; SCHAEFFER, R.: A Skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities. *Nucl. Phys. A* 627 (1997), Februar, 710-746. [LINK](#)
- [CBH⁺98a] CHABANAT, E. ; BONCHE, P. ; HAENSEL, P. ; MEYER, J. ; SCHAEFFER, R.: A Skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities Part II. Nuclei far from stabilities. *Nucl. Phys. A* 635 (1998), Mai, 231-256. [LINK](#)
- [CBH⁺98b] CHABANAT, E. ; BONCHE, P. ; HAENSEL, P. ; MEYER, J. ; SCHAEFFER, R.: Erratum to “A Skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities. (II): Nuclei far from stabilities” [Nucl. Phys. A 635 (1998) 231-256]. *Nucl. Phys. A* 643 (1998), Dezember, 441-441. [LINK](#)
- [Cha31] CHANDRASEKHAR, S.: The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs. *Astrophys. J.* 74 (1931), Juli, 81. [LINK](#)
- [Cha32a] CHADWICK, J.: Possible Existence of a Neutron. *Nature* 129 (1932), 312. [LINK](#)
- [Cha32b] CHADWICK, J.: The Existence of a Neutron. *Royal Society of London Proceedings Series A* 136 (1932), Juni, 692-708. [LINK](#)
- [Cha64] CHANDRASEKHAR, S.: The Dynamical Instability of Gaseous Masses Approaching the Schwarzschild Limit in General Relativity. *Astrophys. J.* 140 (1964), August, 417. [LINK](#)
- [CHM60] COLDWELL-HORSFALL, R. A. ; MARADUDIN, A. A.: Zero-Point Energy of an Electron Lattice. *J. Math. Phys.* 1 (1960), 395-404. [LINK](#)

- [Cor00] CORNELIUS, T.: *Untersuchung des Einflusses von Grundzustandsdeformationen auf Signaturen sphärischer Schalenabschlüsse in Mean-Field-Modellen*, Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main, Diplomarbeit, 2000
- [CPM02] COTTAM, J. ; PAERELS, F. ; MENDEZ, M.: Gravitationally redshifted absorption lines in the X-ray burst spectra of a neutron star. *Nature* 420 (2002), November, 51-54. [LINK](#)
- [DFT84] DOBACZEWSKI, J. ; FLOCARD, H. ; TREINER, J.: Hartree-Fock-Bogolyubov description of nuclei near the neutron-drip line. *Nucl. Phys. A* 422 (1984), Juni, 103-139. [LINK](#)
- [DSN04] DOBACZEWSKI, J. ; STOITSOV, M. V. ; NAZAREWICZ, W.: Skyrme-HFB deformed nuclear mass table. BIJKER, R. (Hrsg.) ; CASTEN, R. F. (Hrsg.) ; FRANK, A. (Hrsg.): *American Institute of Physics Conference Series*, 2004, 51-56. [LINK](#)
- [FMT49] FEYNMAN, R. P. ; METROPOLIS, N. ; TELLER, E.: Equations of State of Elements Based on the Generalized Fermi-Thomas Theory. *Phys. Rev.* 75 (1949), Mai, 1561-1573. [LINK](#)
- [FP81] FRIEDMAN, B. ; PANDHARIPANDE, V. R.: Hot and cold, nuclear and neutron matter. *Nucl. Phys. A* 361 (1981), Mai, 502-520. [LINK](#)
- [GK00] GLENDENNING, N. K. ; KETTNER, C.: Possible third family of compact stars more dense than neutron stars. *Astron. Astrophys.* 353 (2000), Januar, L9-L12. [LINK](#)
- [Gle85] GLENDENNING, N. K.: Neutron stars are giant hypernuclei? *Astrophys. J.* 293 (1985), Juni, 470-493. [LINK](#)
- [Gle00] GLENDENNING, N. K.: *Compact Stars — Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity*. second. New York : Springer, 2000
- [GM95] GREINER, W. ; MARUHN, J.: *Kernmodelle*. Frankfurt : Verlag Harri Deutsch, 1995
- [Gol68] GOLD, T.: Rotating Neutron Stars as the Origin of the Pulsating Radio Sources. *Nature* 218 (1968), 731. [LINK](#)
- [Gor00] GORIELY, S.: Nuclear inputs for astrophysics applications, AIP, 2000, 287-294. [LINK](#)
- [GSBP03] GORIELY, S. ; SAMYN, M. ; BENDER, M. ; PEARSON, J. M.: Further explorations of Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov mass formulas. II. Role of the effective mass. *Phys. Rev. C* 68 (2003), November, Nr. 5, 054325. [LINK](#)

- [GSH⁺02] GORIELY, S. ; SAMYN, M. ; HEENEN, P.-H. ; PEARSON, J. M. ; TONDEUR, F.: Hartree-Fock mass formulas and extrapolation to new mass data. *Phys. Rev. C* 66 (2002), August, Nr. 2, 024326. [LINK](#)
- [GSPO05] GORIELY, S. ; SAMYN, M. ; PEARSON, J. M. ; ONSI, M.: Further explorations of Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov mass formulas. IV: Neutron-matter constraint. *Nucl. Phys. A* 750 (2005), April, 425-443. [LINK](#)
- [GTM05] GENG, L. ; TOKI, H. ; MENG, J.: Masses, Deformations, and Charge Radii–Nuclear Ground-State Properties in the Relativistic Mean Field Model. *Prog. Theor. Phys.* 113 (2005), April, 785-800. [LINK](#)
- [GTP01] GORIELY, S. ; TONDEUR, F. ; PEARSON, J. M.: a Hartree-Fock Nuclear Mass Table. *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 77 (2001), März, 311-381. [LINK](#)
- [Hae01] HAENSEL, P.: Neutron Star Crusts. BLASCHKE, D. (Hrsg.) ; GLENDENNING, N. K. (Hrsg.) ; SEDRAKIAN, A. (Hrsg.): *LNP Vol. 578: Physics of Neutron Star Interiors*, 2001, 127. [LINK](#)
- [HBP⁺68] HEWISH, A. ; BELL, S. J. ; PILKINGTON, J. D. ; SCOTT, P. F. ; COLLINS, R. A.: Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source. *Nature* 217 (1968), 709. [LINK](#)
- [HKY96] HAENSEL, P. ; KAMINKER, A. D. ; YAKOVLEV, D. G.: Electron neutrino-antineutrino bremsstrahlung in a liquid phase of neutron star crusts. *Astron. Astrophys.* 314 (1996), Oktober, 328-340. [LINK](#)
- [HLLK05] HOBBS, G. ; LORIMER, D. R. ; LYNE, A. G. ; KRAMER, M.: A statistical study of 233 pulsar proper motions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 360 (2005), Juli, 974-992. [LINK](#)
- [HNW64] HOYLE, F. ; NARLIKAR, J. V. ; WHEELER, J. A.: Electromagnetic Waves from Very Dense Stars. *Nature* 203 (1964), 914. [LINK](#)
- [HP94] HAENSEL, P. ; PICHON, B.: Experimental nuclear masses and the ground state of cold dense matter. *Astron. Astrophys.* 283 (1994), März, 313-318. [LINK](#)
- [HWW58] HARRISON, K. ; WAKANO, M. ; WHEELER, J. A.: Matter-energy at high density: end point of thermonuclear evolution. *La structure et évolution de l'univers*. R. Stoops, Bruxelles, 1958, S. 124–140
- [HZD89] HAENSEL, P. ; ZDUNIK, J. L. ; DOBACZEWSKI, J.: Composition and equation of state of cold catalyzed matter below neutron drip. *Astron. Astrophys.* 222 (1989), September, 353-357. [LINK](#)

- [HZP⁺00] HANAUSKE, M. ; ZSCHIESCHE, D. ; PAL, S. ; SCHRAMM, S. ; STÖCKER, H. ; GREINER, W.: Neutron Star Properties in a Chiral SU(3) Model. *Astrophys. J.* 537 (2000), Juli, 958-963. LINK
- [JHV⁺05] JOHNSTON, S. ; HOBBS, G. ; VIGELAND, S. ; KRAMER, M. ; WEISBERG, J. M. ; LYNE, A. G.: Evidence for alignment of the rotation and velocity vectors in pulsars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 364 (2005), Dezember, 1397-1412. LINK
- [JRS06] JAIKUMAR, P. ; REDDY, S. ; STEINER, A. W.: Strange Star Surface: A Crust with Nuggets. *Phys. Rev. Lett.* 96 (2006), Januar, Nr. 4, 041101. LINK
- [JS82] JOG, C. J. ; SMITH, R. A.: Mixed lattice phases in cold dense matter. *Astrophys. J.* 253 (1982), Februar, 839-841. LINK
- [KT80] KRIVINE, H. ; TREINER, J. ; BOHIGAS, O.: Derivation of a fluid-dynamical lagrangian and electric giant resonances. *Nucl. Phys. A* 336 (1980), März, 155-184. LINK
- [KvA02] KAPLAN, D. L. ; VAN KERKWIJK, M. H. ; ANDERSON, J.: The Parallax and Proper Motion of RX J1856.5-3754 Revisited. *Astrophys. J.* 571 (2002), Mai, 447-457. LINK
- [Lan32] LANDAU, L. D.: On the Theory of Stars. *Physik. Zeits. Sowjetunion* 1 (1932), S. 285
- [LD91] LATTIMER, J. M. ; DOUGLAS SWESTY, F.: A generalized equation of state for hot, dense matter. *Nucl. Phys. A* 535 (1991), Dezember, 331-376. LINK
- [LG98] LYNE, A. G. ; GRAHAM-SMITH, F.: *Pulsar astronomy*. Pulsar astronomy / Andrew G. Lyne and Francis Graham-Smith. Cambridge, U.K.; New York: Cambridge University Press, 1998. (Cambridge astrophysics series ; 31) ISBN 0521594138, 1998 LINK
- [Lin10] LINDEMANN, F. A.: The calculation of molecular vibration frequencies. *Z. Phys.* 11 (1910), S. 609
- [LKR97] LALAZISSIS, G. A. ; KÖNIG, J. ; RING, P.: New parametrization for the Lagrangian density of relativistic mean field theory. *Phys. Rev. C* 55 (1997), Januar, 540-543. LINK
- [LPT03] LUNNEY, D. ; PEARSON, J. M. ; THIBAUT, C.: Recent trends in the determination of nuclear masses. *Reviews of Modern Physics* 75 (2003), August, 1021-1082. LINK

- [LRR99] LALAZISSIS, G. A. ; RAMAN, S. ; RING, P.: Ground-State Properties of Even-Even Nuclei in the Relativistic Mean-Field Theory. *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 71 (1999), 1. [LINK](#)
- [Mad94] MADSEN, J.: Shell model versus liquid drop model for strangelets. *Phys. Rev. D* 50 (1994), September, 3328-3331. [LINK](#)
- [MN81a] MÖLLER, P. ; NIX, J. R.: Atomic Masses and Nuclear Ground-State Deformations Calculated with a New Macroscopic-Microscopic Model. *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 26 (1981), 165. [LINK](#)
- [MN81b] MÖLLER, P. ; NIX, J. R.: Nuclear mass formula with a Yukawa-plus-exponential macroscopic model and a folded-Yukawa single-particle potential. *Nucl. Phys. A* 361 (1981), Mai, 117-146. [LINK](#)
- [MN88] MÖLLER, P. ; NIX, J. R.: Nuclear Masses from a Unified Macroscopic-Microscopic Model. *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 39 (1988), 213. [LINK](#)
- [MNK97] MÖLLER, P. ; NIX, J. R. ; KRATZ, K.-L.: Nuclear Properties for Astrophysical and Radioactive-Ion Beam Applications. *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 66 (1997), 131. [LINK](#)
- [MNMS95] MÖLLER, P. ; NIX, J. R. ; MYERS, W. D. ; SWIATECKI, W. J.: Nuclear Ground-State Masses and Deformations. *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 59 (1995), 185. [LINK](#)
- [MR67] MESTEL, L. ; RUDERMAN, M. A.: The energy content of a white dwarf and its rate of cooling. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 136 (1967), 27. [LINK](#)
- [MS66] MYERS, W. D. ; SWIATECKI, W. J.: Nuclear masses and deformations. *Nucl. Phys.* 81 (1966), 1-60. [LINK](#)
- [Mye77] MYERS, W. D.: Droplet Model of Atomic Nucleus. *IFI Plenum, New York*, 1977
- [Nol05] NOLTING, W.: *Grundkurs Theoretische Physik 4*. Berlin : Springer, 2005
- [NV73] NEGELE, J. W. ; VAUTHERIN, D.: Neutron star matter at sub-nuclear densities. *Nucl. Phys. A* 207 (1973), Juni, 298-320. [LINK](#)
- [OV39] OPPENHEIMER, J. R. ; VOLKOFF, G. M.: On Massive Neutron Cores. *Physical Review* 55 (1939), Februar, 374-381. [LINK](#)
- [Pac67] PACINI, F.: Energy Emission from a Neutron Star. *Nature* 216 (1967), 567. [LINK](#)

- [Pet92] PETHICK, C. J.: Cooling of neutron stars. *Reviews of Modern Physics* 64 (1992), Oktober, 1133-1140. [LINK](#)
- [PR95] PETHICK, C. J. ; RAVENHALL, D. G.: Matter at large neutron excess and the physics of neutron-star crusts. *Annual Review of Nuclear and Particle Science* 45 (1995), 429-484. [LINK](#)
- [PWL⁺02] PONS, J. A. ; WALTER, F. M. ; LATTIMER, J. M. ; PRAKASH, M. ; NEUHÄUSER, R. ; AN, P.: Toward a Mass and Radius Determination of the Nearby Isolated Neutron Star RX J185635-3754. *Astrophys. J.* 564 (2002), Januar, 981-1006. [LINK](#)
- [PZS⁺99] PAPAZOGLU, P. ; ZSCHIESCHE, D. ; SCHRAMM, S. ; SCHAFFNER-BIELICH, J. ; STÖCKER, H. ; GREINER, W.: Nuclei in a chiral SU(3) model. *Phys. Rev. C* 59 (1999), Januar, 411-427. [LINK](#)
- [Ris04] RISCHKE, D. H.: The quark-gluon plasma in equilibrium. *Progress in Particle and Nuclear Physics* 52 (2004), März, 197-296. [LINK](#)
- [RPW83] RAVENHALL, D. G. ; PETHICK, C. J. ; WILSON, J. R.: Structure of Matter below Nuclear Saturation Density. *Phys. Rev. Lett.* 50 (1983), Juni, 2066-2069. [LINK](#)
- [RR74] RHOADES, C. E. ; RUFFINI, R.: Maximum Mass of a Neutron Star. *Phys. Rev. Lett.* 32 (1974), Februar, 324-327. [LINK](#)
- [RWB⁺06] RÜSTER, S. B. ; WERTH, V. ; BUBALLA, M. ; SHOVKOVY, I. A. ; RISCHKE, D. H.: Phase diagram of neutral quark matter: The effect of neutrino trapping. *Phys. Rev. D* 73 (2006), Februar, Nr. 3, 034025. [LINK](#)
- [Sag06] SAGERT, I.: *Asymmetric neutrino emission in quark matter and pulsar kicks*, Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main, Diplomarbeit, 2006. [LINK](#)
- [Sal61] SALPETER, E. E.: Energy and Pressure of a Zero-Temperature Plasma. *Astrophys. J.* 134 (1961), November, 669. [LINK](#)
- [Sch02] SCHRAMM, S.: Deformed nuclei in a chiral model. *Phys. Rev. C* 66 (2002), Dezember, Nr. 6, 064310. [LINK](#)
- [Sch03] SCHRAMM, S.: Nuclear and neutron star radii. *Phys. Lett. B* 560 (2003), Mai, 164-170. [LINK](#)
- [Sch05] SCHAFFNER-BIELICH, J.: Strange quark matter in stars: a general overview. *Journal of Physics G Nuclear Physics* 31 (2005), Juni, 651. [LINK](#)

- [SDD80] SLATTERY, W. L. ; DOOLEN, G. D. ; DEWITT, H. E.: Improved equation of state for the classical one-component plasma. *Phys. Rev. A* 21 (1980), Juni, 2087-2095. [LINK](#)
- [SDN⁺03] STOITSOV, M. V. ; DOBACZEWSKI, J. ; NAZAREWICZ, W. ; PITTEL, S. ; DEAN, D. J.: Systematic study of deformed nuclei at the drip lines and beyond. *Phys. Rev. C* 68 (2003), November, Nr. 5, 054312. [LINK](#)
- [SGBP04] SAMYN, M. ; GORIELY, S. ; BENDER, M. ; PEARSON, J. M.: Further explorations of Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov mass formulas. III. Role of particle-number projection. *Phys. Rev. C* 70 (2004), Oktober, Nr. 4, 044309. [LINK](#)
- [SGH⁺02] SAMYN, M. ; GORIELY, S. ; HEENEN, P.-H. ; PEARSON, J. M. ; TONDEUR, F.: A Hartree-Fock-Bogoliubov mass formula. *Nucl. Phys. A* 700 (2002), März, 142-156. [LINK](#)
- [SGP03] SAMYN, M. ; GORIELY, S. ; PEARSON, J. M.: Further explorations of Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov mass formulas. I: Role of density dependence in pairing force. *Nucl. Phys. A* 725 (2003), September, 69-81. [LINK](#)
- [SGST00] SCHERTLER, K. ; GREINER, C. ; SCHAFFNER-BIELICH, J. ; THOMA2, M. H.: Quark phases in neutron stars and a third family of compact stars as signature for phase transitions. *Nucl. Phys. A* 677 (2000), September, 463-490. [LINK](#)
- [Sha64] SHAPIRO, I. I.: Fourth Test of General Relativity. *Phys. Rev. Lett.* 13 (1964), Dezember, 789-791. [LINK](#)
- [She02] SHEN, H.: Complete relativistic equation of state for neutron stars. *Phys. Rev. C* 65 (2002), März, Nr. 3, 035802. [LINK](#)
- [SHGS06] SAGERT, I. ; HEMPEL, M. ; GREINER, C. ; SCHAFFNER-BIELICH, J.: Compact stars for undergraduates. *European Journal of Physics* 27 (2006), Mai, 577-610. [LINK](#)
- [SHSG02] SCHAFFNER-BIELICH, J. ; HANAUSKE, M. ; STÖCKER, H. ; GREINER, W.: Phase Transition to Hyperon Matter in Neutron Stars. *Phys. Rev. Lett.* 89 (2002), Nr. 17, 171101. [LINK](#)
- [SKJM06] SCHECK, L. ; KIFONIDIS, K. ; JANKA, H.-T. ; MÜLLER, E.: Multidimensional supernova simulations with approximative neutrino transport. I. Neutron star kicks and the anisotropy of neutrino-driven explosions in two spatial dimensions. *Astron. Astrophys.* 457 (2006), Oktober, 963-986. [LINK](#)

- [ST83] SHAPIRO, S. L. ; TEUKOLSKY, S. A.: *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. New York : John Wiley & Sons, 1983
- [ST94] SUGAHARA, Y. ; TOKI, H.: Relativistic mean-field theory for unstable nuclei with non-linear σ and ω terms. *Nucl. Phys. A* 579 (1994), Oktober, 557-572. [LINK](#)
- [SW86] SEROT, B. D. ; WALECKA, J. D.: THE RELATIVISTIC NUCLEAR MANY BODY PROBLEM. *Adv. Nucl. Phys.* 16 (1986), S. 1-327
- [SZ03] SCHRAMM, S. ; ZSCHIESCHE, D.: Rotating neutron stars in a chiral SU(3) model. *J. Phys. G* 29 (2003), März, 531-542. [LINK](#)
- [TBHZ04] TRÜMPER, J. E. ; BURWITZ, V. ; HABERL, F. ; ZAVLIN, V. E.: The puzzles of RX J1856.5-3754: neutron star or quark star? *Nuclear Physics B Proceedings Supplements* 132 (2004), Juni, 560-565. [LINK](#)
- [TC65] TSURUTA, S. ; CAMERON, A. G. W.: Composition of matter in nuclear statistical equilibrium at high densities. *Canadian Journal of Physics* 43 (1965), 2056. [LINK](#)
- [TC99] THORSETT, S. E. ; CHAKRABARTY, D.: Neutron Star Mass Measurements. I. Radio Pulsars. *Astrophys. J.* 512 (1999), Februar, 288-299. [LINK](#)
- [TGPO00] TONDEUR, F. ; GORIELY, S. ; PEARSON, J. M. ; ONSI, M.: Towards a Hartree-Fock mass formula. *Phys. Rev. C* 62 (2000), August, Nr. 2, 024308. [LINK](#)
- [Tol39] TOLMAN, R. C.: Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid. *Phys. Rev.* 55 (1939), Februar, 364-373. [LINK](#)
- [VPR⁺00] VIDAÑA, I. ; POLLS, A. ; RAMOS, A. ; ENGVIK, L. ; HJORTH-JENSEN, M.: Hyperon-hyperon interactions and properties of neutron star matter. *Phys. Rev. C* 62 (2000), September, Nr. 3, 035801. [LINK](#)
- [Wal74] WALECKA, J. D.: A theory of highly condensed matter. *Ann. Phys. (N.Y.)* 83 (1974), April, 491-529. [LINK](#)
- [Wal01] WALTER, F. M.: The Proper Motion, Parallax, and Origin of the Isolated Neutron Star RX J185635-3754. *Astrophys. J.* 549 (2001), März, 433-440. [LINK](#)
- [Web05] WEBER, F.: Strange quark matter and compact stars. *Progress in Particle and Nuclear Physics* 54 (2005), März, 193-288. [LINK](#)

- [Wei35] WEIZSÄCKER, C. F.: Zur Theorie der Kernmassen. *Z. Phys.* 96 (1935), Juli, S. 431–458
- [Wei72] WEINBERG, S.: *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, by Steven Weinberg, pp. 688. ISBN 0-471-92567-5. Wiley-VCH, July 1972., 1972 LINK
- [WFF88] WIRINGA, R. B. ; FIKS, V. ; FABROCINI, A.: Equation of state for dense nucleon matter. *Phys. Rev. C* 38 (1988), August, 1010-1037. LINK
- [Wit84] WITTEN, E.: Cosmic separation of phases. *Phys. Rev. D* 30 (1984), Juli, 272-285. LINK
- [WL02] WALTER, F. M. ; LATTIMER, J. M.: A Revised Parallax and Its Implications for RX J185635-3754. *Astrophys. J.* 576 (2002), September, L145-L148. LINK
- [WS33] WIGNER, E. ; SEITZ, F.: On the Constitution of Metallic Sodium. *Physical Review* 43 (1933), Mai, 804-810. LINK
- [WS34] WIGNER, E. ; SEITZ, F.: On the Constitution of Metallic Sodium. II. *Phys. Rep.* 46 (1934), September, 509-524. LINK
- [WT03] WEISBERG, J. M. ; TAYLOR, J. H.: The Relativistic Binary Pulsar B1913+16. BAILES, M. (Hrsg.) ; NICE, D. J. (Hrsg.) ; THORSETT, S. E. (Hrsg.): *ASP Conf. Ser. 302: Radio Pulsars*, 2003, 93. LINK