Ideale Magneto-Hydrodynamik

Übung zur Vorlesung:
Einführung in astrophysikalische Plasmen

Blatt 5, 29.10.-12.11.2016

1. In der Abwesenheit von Stosswellen lassen sich die Gleichungen der idealen Hydrodynamik in der folgenden Weise formulieren:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho v_j\right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho v_i v_j + p\delta_{ij}\right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho s\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho s v_j\right) &= 0. \end{aligned}$$

   Hier ist x die Orts- und t die Zeitkoordinate. Die Dichte ist mit ρ bezeichnet und die drei Komponenten des Geschwindigkeitsvektors mit $v_i, \quad i = 1 \ldots 3$. Die spezifische Entropie (Entropie pro Masseneinheit) bezeichnen wir mit s. Gemäss der Einsteinschen Summenkonvention wird über identische Indizes summiert. Identifiziere in den Gleichungen die bekannten Differenzialoperatoren 'Gradient' und 'Divergenz'. Transformiere die dritte Gleichung (Entropiegleichung) in eine Schreibweise mit Lagrangescher, mitbewegter Zeitableitung. Welche Eigenschaft der Entropie kann man daraus ablesen?

2. Betrachte ein homogenes Magnetfeld der Stärke B_0 in einem Plasma mit konstanter Dichte und Druck. Für welchen Wert von v_A bildet die kleine Störung

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \varepsilon v_A \sin\left(kz - \omega t\right)\hat{x} \\ \vec{B} &= B_0\hat{z} + \varepsilon B_0 \sin\left(kz - \omega t\right)\hat{x} \end{aligned}$$

   eine Lösung erster Ordnung in ε der idealen Gleichungen der Magnetohydrodynamik?